الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الأمير عبد القادر للعلوم الإسلامية

كلية الشريعة والاقتصاد
قسم الاقتصاد والإدارة

محاضرات في الاقتصاد الجزئي

إعداد: د / عابد صونية

السنة الجامعية : **2020/2019**

المحاضرة رقم 1

المبحث الثاني: تعظيم الربح في المدى القصير باستخدام دالة التكلفة

نعلم أن الربح هو الفرق بين الإيرادات الإجمالية والتكاليف الإجمالية أي :

$P = RT - CT$ ، والإيرادات الإجمالية هي حاصل ضرب الكمية المنتجة في سعر بيع الوحدة أي: $RT = P_q . Q$، أما التكاليف الكلية فهي من الشكل :

$$CT = f(Q) + CF$$

ومنه دالة الربح تصبح من الشكل:

$$P = (P_q . Q) - (f(Q) + CF)$$

وتكون دالة الربح في أعظم قيمة لها إذا تحقق شرطان هما:

الشرط الأول : أن تكون المشتقة الأولى لها بالنسبة للمتغير Q يساوي الصفر

الشرط الثاني: أن تكون المشتقة الثانية أقل من الصفر

من الشرط الأول نجد :

$$\frac{dP}{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_q - Cm = 0 \quad \Rightarrow \quad P_q = Cm$$

معنى هذا أن شرط تعظيم الربح هو أن يكون سعر بيع الوحدة المنتجة (الإيراد الحدي) يساوي إلى التكلفة الحدية، وبتعبير آخر ، إن حجم الإنتاج الذي يحقق به المنتج أعظم ربح هو الذي يكون عنده التكلفة الحدية تساوي إلى سعر بيع الوحدة المنتجة.[1]

مثال تطبيقي:

لنفترض أن دالة التكلفة لمنتج ما على الشكل :

$$CT = 0.02\ q^3 - 0.8\ q^2 + 16\ q + 10$$

وسعر بيع الوحدة المنتجة $P_q = 8$

---

[1]) Pierre Picart, Op Cit, P 220

المطلوب : ما هو حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق لنا أعظم إنتاج؟

الحل:

لدينا: $P = (P_q . q) - CT$

بالتعويض بالمعطيات السابقة نجد :

$$P = 8 q - (0.02 q^3 - 0.8 q^2 + 16 q + 10)$$

الشرط الأول : $P - Cm = 0$

ومنه : $8 - (0,0- q^2 - 1,6 q + 16) = 0$

أي : $- 0,06 q^2 + 1,6 q - 8 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية ، ولحلها نستخدم المميز Δ ، وهو يساوي في هذه الحالة:

$$\Delta = 1,6^2 - (4 .(- 0,06) . (-8)) = 0,64 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 0,8$$

$$q_1 = 6,66 \qquad q_2 = 20$$

نلاحظ أنه يوجد حلين يحققان الشرط الأول ، يمكن إقصاء أحد الحلين باستخدام الشرط الثاني .

الشرط الثاني: المشتقة الثانية أقل من الصفر، أي:

$$d^2 P / d Q^2 = - 0,12q + 1,6$$

عندما $q= 6,66$ نجد: $d^2 P / d Q^2 = +0,8 > 0$ الحل مرفوض

عندما $q= 20$ نجد : $d^2 P / d Q^2 = - 0,8 < 0$ الشرط محقق

ومنه حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح هو $q = 20$

حساب قيمة الربح :

الإيرادات الإجمالية : $RT = P_q . Q = 8 . 20 = 160$

التكاليف الكلية: $CT = 0.02 (20)^3 - 0.8 (20)^2 + 16 (20) + 10 = 170$

حجم الربح: $P = 160 - 170 = - 10$

نلاحظ أن المنتج هنا يحقق خسارة وليس ربح ، ومقدار الخسارة تساوي إلى (−10) وهي أقل خسارة يمكن أن يحققها في ظل المعطيات السابقة.

ما نلاحظه أيضا هو أن مقدار الخسارة تساوي قيمة التكلفة الثابتة، معنى هذا أن المؤسسة تمكنت من تغطية التكاليف المتغيرة كلها، وبما أن التكاليف الثابتة تدفعها المؤسسة سواء أنتجت أو لم تنتج ، فمن مصلحة المؤسسة الاستمرار في الإنتاج إذا ارتأت أن الخسارة التي حققتها نتيجة ظروف عابرة، وهذا ما يجعلها تحتفظ باليد العاملة التي لديها من جهة، وتلبي احتياجات بعض الزبائن على الأقل حتى لا تفقدهم.

إذا كانت الخسارة التي تحققها المؤسسة أكبر من قيمة التكاليف الثابتة هنا يكون من صالح المؤسسة أن تتوقف عن النشاط (غلق المؤسسة).

عتبة الغلق وعتبة المردودية:

1) نسمي النقطة التي يكون فيها مقدار الربح (الخسارة) يساوي إلى التكاليف الثابتة أي $P = -CF$ ، **بعتبة الغلق**، وهي تقابل أدنى سعر يمكن أن تتحمله المؤسسة فعنده تتحمل المؤسسة أدنى خسارة ممكنة والتي تساوي التكاليف الثابتة:

$$P = -CF \rightarrow P_q\,Q - (CV + CF) = -CF \rightarrow P_q\,Q - CV = 0$$

$$P = CV/Q \rightarrow P_q = CVM$$

إذن تبلغ المؤسسة عتبة الغلق عندما يكون سعر بيع الوحدة يساوي إلى متوسط التكلفة المتغيرة.

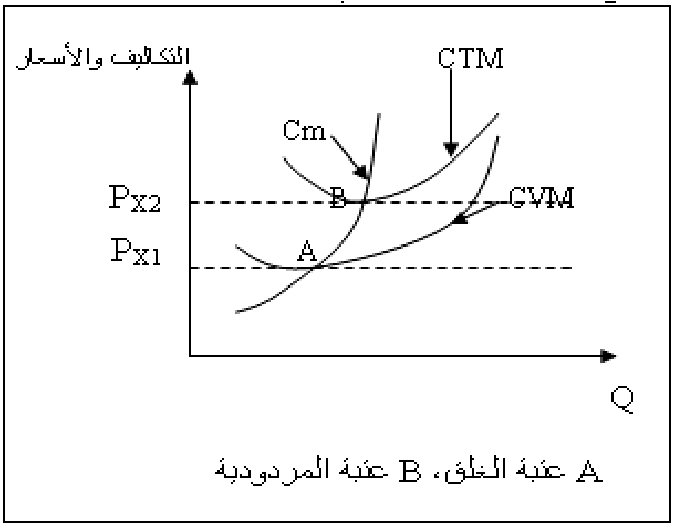
2) نسمي النقطة التي يكون مقدار الربح يساوي إلى الصفر **بعتبة المردودية**، وهي النقطة التي تبدأ بعدها المؤسسة في تحقيق الأرباح.

$$P = 0 \rightarrow P_q \,.\, Q - CT = 0 \rightarrow P_q = CT / Q$$

$$P_q = CTM$$

إذن تبلغ المؤسسة عتبة المردودية عندما يكون سعر بيع الوحدة المنتجة يساوي إلى متوسط التكلفة الكلية.

التمثيل البياني لعتبة الغلق وعتبة المردودية



المبحث الثالث: دالة التكلفة في الفترة الطويلة

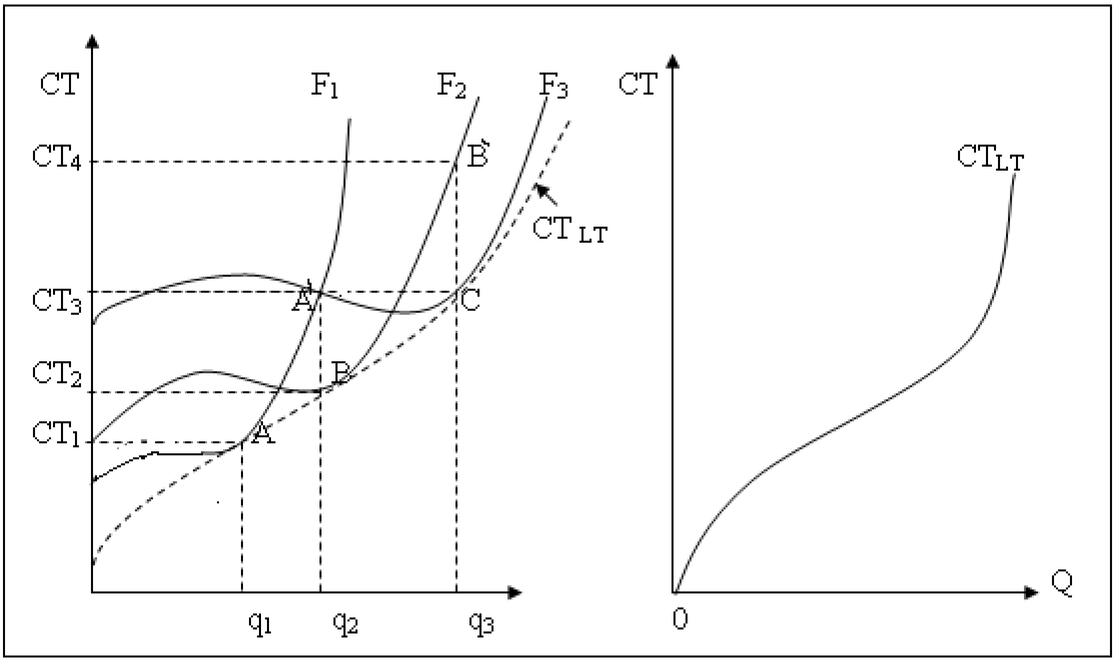
المدى الطويل هو المدى الذي تتمكن فيه المؤسسة من تغيير حجم عناصر الإنتاج الثابتة، فتصبح كل عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية متغيرة، وإن كان كذلك، فإن التكاليف المرتبطة بعناصر الإنتاج الثابتة أيضا تتغير بتغيرها فتصبح كل التكاليف متغيرة، إذن دالة التكلفة في المدى الطويل تكون على الشكل:

$$CT_{LT} = f\ (\ q\ )$$

يختلف شكل منحنى التكلفة الكلية في الفترة الطويلة عنه في الفترة القصيرة، وكذلك بالنسبة لمنحنيات التكلفة المتوسطة والحدية.

منحنى التكلفة الكلية في الفترة الطويلة:

يمكننا استنتاج شكل منحنى التكلفة الكلية في الفترة الطويلة، من خلال الشكل التالي، وهو عبارة عن منحنيات التكلفة الكلية في الفترة القصيرة عند كل مستوى من مستويات الطاقة الإنتاجية للمؤسسة، والتي تمثلها مستويات مختلفة من التكاليف الثابتة والمتغيرة.



إذا أراد المنتج إنتاج الكمية q_1 فإن ذلك سيكلفه مستوى من التكلفة قدرها CT_1 والتي تقابل الوضعية Aعلى منحنى القدرة الإنتاجية F_1، وإذا أراد زيادة إنتاجه إلى q_2 ، يمكن للمنتج إنتاج هذه الكمية بنفس القدرة الإنتاجية F_1 والتي تقابل الوضعية A' وهنا يستوجب عليه تحمل تكلفة CT_3 ، و يمكن إنتاج نفس الكمية بتكلفة أقل إذا قام برفع حجم التكاليف الثابتة إلى المستوى الثاني وهنا يتعين عليه تحمل تكلفة CT_2 فقط، والتي تحدد على منحنى القدرة الإنتاجية F_2 وتقابلها الوضعية B

وإذا أراد إنتاج الكمية q_3، يمكنه أيضا إنتاجها بالقدرة الإنتاجية F_2 وتمثل الوضعية B'، وهنا يتحمل تكلفة قدرها CT_4 ، وهي أكبر من لو أنتج نفس الكمية بالوضعية C على منحنى القدرة الإنتاجية F_3 والذي يمثل مستوى أكبر من التكلفة الثابتة حيث يتحمل تكلفة تقدر بـ CT_3 **فقط.**

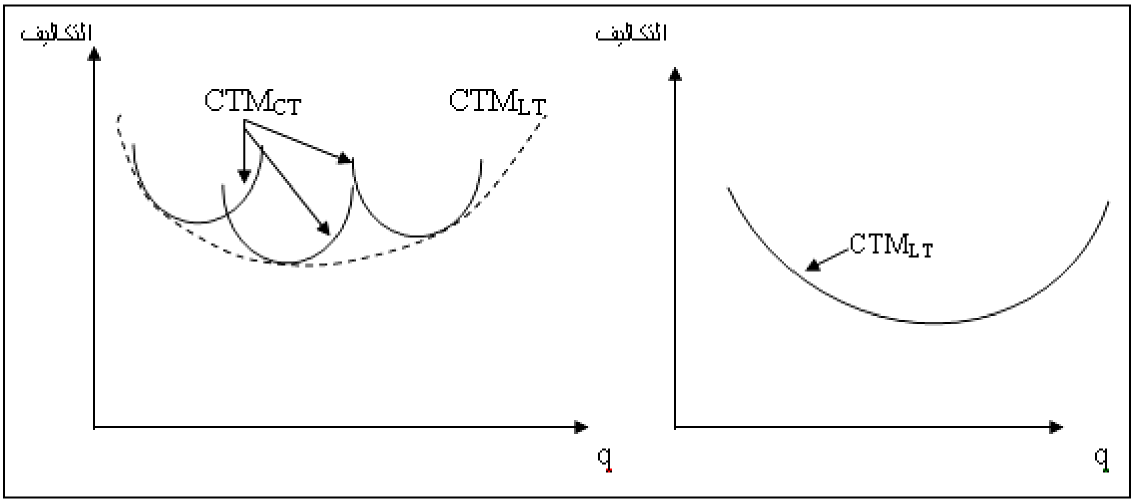
يتبين لنا مما سبق أن تغيير حجم العناصر الثابتة بوسعه تخفيض حجم التكاليف الكلية، كلما كبر حجم الإنتاج المراد إنتاجه، وهذا هو المقصود بالقول الاستفادة من اقتصاديات الحجم أو اقتصاديات النطاق

على الشكل السابق، إذا وصلنا بين النقاط A , B , C نتحصل على منحنى التكلفة الكلية في المدى الطويل، وهو يمثل غلاف لمنحنيات التكلفة في الفترة القصيرة عند كل مستوى من مستويات القدرة الإنتاجية، والملاحظ أنه ينطلق من نقطة الصفر، حيث أن التكاليف الثابتة تساوي إلى الصفر.

منحنى متوسط التكلفة في المدى الطويل

أما بالنسبة لدالة التكلفة المتوسطة في المدى الطويل CTM_{LT} ، فإن المنحنى الممثل لهـا يبـدأ في الانخفاض في البداية إلى أن يصل إلى حد معين ، ثم يتجه نحو الارتفاع وهذا تماشيا مع المراحل الـثلاث لغلة الحجم.

ففي المرحلة الأولى ، أي مرحلة غلة الحجم المتزايدة، تزيد غلة الحجم بنسبة أكبر من نسبة زيـادة عناصر الإنتاج، لذا فإن نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الثابتة تقل مع زيـادة حجـم المؤسسـة، فمنحنى CTM يتجه نحو الانخفاض، إلا أن هذا الانخفاض لا يستمر ، حيث تصل المؤسسة إلى مرحلة غلة الحجم الثابتة فتزيد الغلة بنفس نسبة زيادة عناصر الإنتاج فيكون نصيب الوحـدة المنتجـة مـن التكاليف عند حده الأدنى، وعندما تستمر المؤسسة في توسيع نطاقها، نصل إلى مرحلة غلـة الحجـم المتناقصة، وهنا يكون نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف يتزايد مع زيادة الكمية المنتجـة، والمـنحنى الممثل لها يتجه نحو الارتفاع. والشكل التالي يوضح شكل المنحنى:



إن منحنى CTM_{LT} ما هو إلا غلاف لكل منحنيات متوسط التكلفة في المدى القصير.

ولما كانت متوسط التكلفة الإجمالية في المدى الطويل تساوي إلى النسبة بين التكلفـة الإجماليـة في المدى الطويل والكمية المنتجة ، فإن التعبير الرياضي لذلك هو:

$$CTM_{LT} = \frac{CT_{LT}}{q}$$

دالة التكلفة الحدية في المدى الطويل:

تماما كمنحنى متوسط التكلفة الكلية، تمثل كل نقطة من منحنى التكلفة الحدية في المـــدى الطويـــل cm_{LT} نقطة ما على أحد منحنيات التكلفة الحدية في المدى القصير، ومنحنى cm_{LT} ، أيضا يأخـــذ شكل الحرف U ، حيث يبدأ في الانخفاض حتى يصل إلى أدنى قيمة له ثم يأخذ في الارتفاع ، وعنـــد صعود منحنى cm_{LT} يقطع منحنى متوسط التكلفة الكلية في أدنى قيمة له.

تعظيم الربح في المدى الطويل:

وصلنا فيما سبق إلى نتيجة أن المنتج يحقق أعظم ربح في الفترة القصيرة عندما تكون التكلفة الحدية تساوي إلى الإيراد الحدي (أي سعر السلعة والتي يحدد في السوق في ظروف المنافسة الكاملة)، يبقـى هذا القانون صالحا حيث يكون الربح أعظميا في الفترة الطويلة، من أجل حجم إنتاجي يتساوى عنـــده التكلفة الحدية في المدى الطويل وسعر البيع بشرط أن تكون هذه التكلفة الحدية متزايدة، عندما يتحدد حجم الإنتاج الأمثل بإمكان المنتج أن يختار القدرة الإنتاجية المثلى أي حجم عناصر الإنتاج L و K.

إذن يتحقق أعظم ربح في الفترة الطويلة عند حجم إنتاج يكون فيه :

$$P_q - cm_{LT} = 0 \quad \text{أي :} \quad P_q = Cm_{LT}$$

المحاضرة 2

الفصل الثالث: دالة العرض

إن المنتج الرشيد الذي يهدف إلى تعظيم ربحه، يقوم بإنتاج سلع قصد بيعها في السوق، فهـــو إذن يعتبر عارضا في السوق، بينما المستهلك والذي يعمل على إشباع حاجاته من هذه السلع يعتبر طالبا في السوق.

إذا كانت دالة الطلب تعبر عن العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها، وهي في الغالـــب علاقة عكسية، فإن دالة العرض تعبر عن العلاقة بين الكمية المعروضة وسعرها أيضا، لكنها في الغالـــب علاقة طردية.

المبحث الأول: جدول العرض ومنحنى دالة العرض

عندما نتحدث عن العرض فإننا نقصد به جدول يظهر الكميات التي يكون البـــائعين (المنـــتجين) مستعدين لبيعها عند الأسعار المحتملة لها، في فترة زمنية معينة، مع افتراض بقاء العوامل الأخرى المؤثرة في العرض على حالها.

ويلاحظ من هذا التعريف عدة أمور:

1ـــ ينصرف التعريف إلى ما يسمى جدول العرض، وليس إلى كمية واحدة عند سعر معين، وهذا يقودنا إلى تفرقة بين مصطلحين : العرض والكمية المعروضة، فالعرض هو قائمة الكميات المختلفة التي يعرضها البائعون عند الأسعار المحتملة لها، بينما الكمية المعروضة هي كمية معينة من القائمة عند ســـعر بعينه.

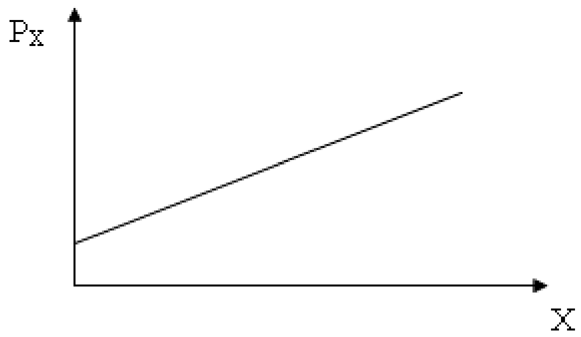
ومن ثم تغير العرض نعني به تغير كميات الجدول كله بالنسبة لنفس الأسعار المحتملة لها، أي جدول عرض جديد، أما تغير الكمية المعروضة فيعني الانتقال في نفس الجدول من كمية معينة عند سر معـــين، إلى كمية أخرى عند سعر مختلف.

2ـــ أن الكميات المختلفة في جدول العرض يرتبط كل منها بسعر معين وزمن معين، فلا يكفي أن نقول مثلا أن البائعين مثلا يعرضون 1000وحدة من سعلة ما عندما يكون سعر الوحدة 4 دنانير، بل يجب أن نحدد الفترة التي يعرضون فيها هذه الكمية عند هذا السعر.

3ـــ إن التعريف السابق يفترض أن الكميات المعروضة في جدول العرض تتأثر بالأسعار المختلفـــة للسلعة نفسها، ولا تتأثر بغير ذلك من المتغيرات، وبهذا فإن هذا التعريف يركز على العلاقة بين ســـعر السلعة، والكمية المعروضة منها، وهذا هو المقصود بافتراض العوامل الأخرى ثابتة

حتـــى نفهم العرض أكثـــــر، لنفتـــــرض المثال التالي والذي يمثل العـــــرض الكلي لسلعة ما ولتكن x:

سعر السلعة x	6	5	4	3	2
الكمية المعروضة من السلعة x	800	600	400	200	000



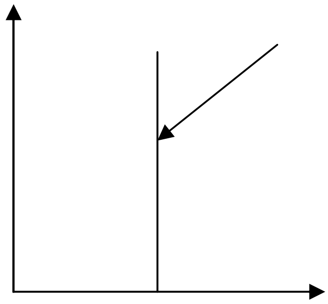
نلاحظ من الجدول ومن الشكل البياني، أن الكمية المعروضة من السلعة x، تتجه نحو الانخفاض كلما انخفض السعر، ونحو الارتفاع كلما ارتفع السعر، أي أن العلاقة بين الكمية المعروضـــة (المـــتغير التابع) ، والسعر (المتغير المستقل) علاقة طردية، والملاحظ أيضا هو أن هناك مستوى معين من السعر (في مثالنا هذا يساوي 2) يرفض عنده البائعين عرض السلعة أي الكمية المعروضة من السلعة يســـاوي الصفر.

المبحث الثاني: اشتقاق منحنيات العرض:

1ـــ الفترة القصيرة جدا:

لا يستطيع المنتج خلال هذه الفترة تغيير حجم إنتاجه، وبالتالي ينخذ منحنى العرض شـــكل خـــط مستقيم عمودي على محور السينات (محور الكميات)، وفي هذه الحالة تكون مرونة العـــرض بالنســـبة للسوق مساوية للصفر.

منحنى العرض



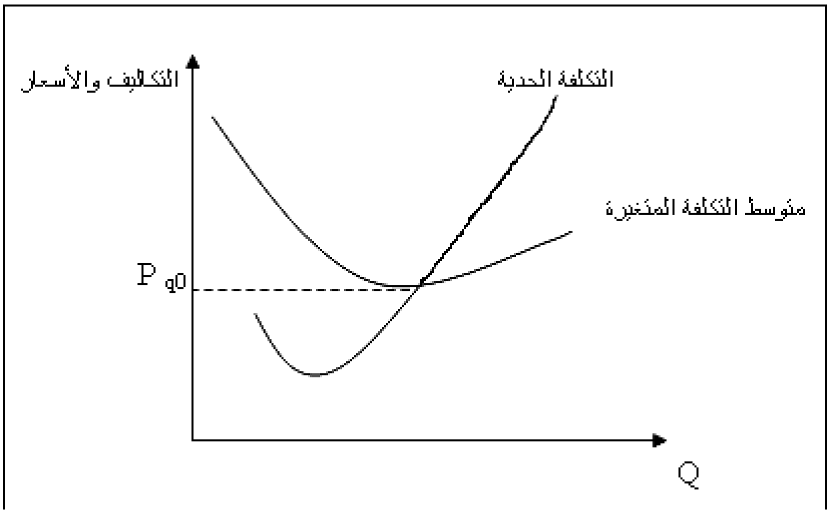
2 ـــ الفترة القصيرة:

يستطيع المنتج خلال هذه الفترة تغيير حجم إنتاجه بتغيير مستوى استخدامه لعناصـــر الإنتـــاج المتغيرة، ولكنه لا يستطيع تعديل حجم المشروع أو الوحدة الإنتاجية، نظرا لوجود بعض عناصر الإنتاج الثابتة في الأجل القصير.

يستمر المنتج في العملية الإنتاجية خلال الفترة القصيرة طالما أنه يستطيع تغطيـــة التكلفـــة المـــتغيرة للمشروع، ومن الممكن اشتقاق دالة العرض بالنسبة للمنتج الفردي في ظل المنافسة الكاملة، في صورة الكمية بدلالة السعر السائد في السوق باستخدام الشرط اللازم لتحقيق أقصى ربح في المدى القصـــير، والذي سبق ورأيناه أي: $P_q = Cm$ وعندئذ تتحدد الكمية المنتجة والمعروضة ، ومعنى هذا الشـــرط أن منحنى العرض ينطبق على منحنى التكلفة الحدية ، إلا أنه لا ينطبق على كل هذا المنحنى، ويمكن استنتاج ذلك من الشرط الكافي للتوازن وهو : $Cm' \rangle 0$ أي تزايد التكلفة الحدية، فمن الشرطين اللازم والكافي للتوازن نستنتج أن منحنى العرض ينطبق على منحنى التكلفة الحدية في الجزء الذي يكون فيه ميل هـــذا الأخير موجبا.

ونعلم أيضا أن المنتج يتوقف عن الإنتاج في الفترة القصيرة عندما يكون السعر أقل مـــن متوســـط التكلفة المتغيرة (عتبة الغلق).

يمكن توضيح ما سبق بالرسم التالي:



إذن ينطبق منحنى العرض في الفترة القصيرة على الجزء من منحنى التكلفة الحدية الصاعد والذي يقع فوق منحنى متوسط التكلفة المتغيرة، وسيكف عن الإنتاج، (أي يكون الإنتاج معدوما) عند الأسعار التي تقل عن p_q.

مثال تطبيقي:

استنتج دالة العرض إذا كانت دالة التكلفة الكلية كما يلي:

$$C = 5000 + 100q - 5q^2 + \frac{2}{3}q^3$$

مع العلم أن السوق تسوده المنافسة الكاملة.

الحل:

نعلم أن الشرط اللازم لتعظيم الربح هو : $Cm = P_q$

أي : $100 - 10q + 2q^2 = p_q$

وذلك إذا كانت q أكبر من مستوى الإنتاج الذي يبلغ عنده CVM أدنى قيمة لها وهو:

لدينا: $CVM = 100 - 5q + \frac{2}{3}q^2$ ، تبلغ هذه الدالة أدنى قيمة لها عندما تنعدم المشتقة الأولى لها أي:

$$\frac{dCVM}{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 - 5q + \frac{2}{3}q^2 = 0$$

$$-5 + \frac{4}{3}q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{15}{4}$$

إذن، لما $q = \frac{15}{4}$ فإن : $CVM = 90,625$ ، وهو أدنى سعر يمكن أن تنتج عنده المؤسسة في المدى القصير، وبالتالي يمكن كتابة دالة العرض كالآتي:

$$Pq = 100 - 10q + 2q^2 \quad si \quad Pq \geq 90,625$$
$$q = 0 \quad si \quad Pq < 90,625$$

وإذا عبرنا عن دالة العرض في صورة الكمية بدلالة السعر نجد :

$$q = \frac{10 + \sqrt{8P_q - 700}}{4} \quad si \quad P_q \geq 90,625$$
$$q = 0 \quad si \quad P_q < 90,625$$

3ـــ الفترة الطويلة:

تعرف هذه الفترة على أنها تلك الفترة التي تسمح للمنتج بتغيير جميع عناصر إنتاجه (بما في ذلك حجــــم المؤسسة)، ومعنى ذلك أنه خلال هذه الفترة لا توجد نفقات ثابتة، وفي حالة المنافسة الكاملــــة، يــــتم التوازن في الأجل الطويل عندما تتعادل التكلفة الحدية للأجل الطويل مع السعر، وتتوقف المؤسسة عن الإنتاج إذا قل السعر عن متوسط التكلفة الإجمالية CTM:

$$Pq = Cm_{LT} \quad SI \quad Pq \geq CTM$$
$$q = 0 \quad SI \quad Pq < CTM$$

وبيانيا، ينطبق منحنى العرض في الأجل الطويل على الجزء من منحنى النفقة الحدية الذي يقع بعد تقاطع منحنى التكلفة الحدية والمتوسطة للأمد الطويل، ودالة العرض للمدى الطويل تكون بالطبع موجبة الميل لنفس أسباب دالة العرض في المدى القصير.

المبحث الثالث: مرونة العرض

أشرنا سابقا أن المرونة عبارة عن مؤشر يقيس لنا مدى حساسية أو استجابة المتغير التابع للتغيرات الـــتي تحدث في أحد المتغيرات المستقلة التي يتأثر بها المتغير التابع ، وهذا بنسبة مئوية.

وعرفنا أيضا أن العرض هو دالة في سعر السلعة، بمعنى أن حجم العرض من سلعة ما يتأثر بسعر هـــذه السلعة، كما تبين لنا أن هناك علاقة طردية بين المتغيرين، لكن هذا لا يكف لتكوين فكرة واضحة عن مدى استجابة الكمية المعروضة للتغير في سعر السلعة، ولهذا يجب الاستعانة بالمرونة لقياس مدى استجابة أو حساسية العرض للتغيرات التي تحدث في سعر السلعة، وتسمى هذه المرونة **بمرونة العرض**

ويمكن التعبير عن مرونة العرض بالعلاقة التالية:

$$\text{مرونة العرض السعرية} = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية المعروضة من السلعة}}{\text{التغير النسبي في سعرها}}$$

فإذا رمزنا لمرونة العرض بالرمز e_o ، والكمية المعروضة بالرمز q، وسعر السلعة P_q، فــإن العلاقــة السابقة تكتب على الشكل التالي:

$$e_o = \frac{\Delta \% q}{\Delta \% P_q} \quad \Rightarrow \quad e_o = \frac{dq}{dP_q} \cdot \frac{P_q}{q} = ...\%$$

ولما كانت العلاقة بين السعر والكمية المعروضة طردية، فإن معامل مرونة العرض يكون دوما موجب، بمعنى أن تغير السعر في اتجاه معين سوف يؤدي إلى تغير الكمية المعروضة في نفس الاتجاه.

وتجدر الإشارة إلى أن العرض يعتبر مرنا ، إذا كان معامل مرونة العرض أكبر من الواحــد الصــحيح $e_o>1$

ويكون العرض غير مرن إذا كان معامل المرونة أقل من الواحد الصحيح $e_o< 1$

أما إذا كان $e_o = 1$ في هذه الحالة نقول أن العرض أحادي (متكافئ) المرونة

وإذا كان $e_o= 0$ نقول أن العرض عديم المرونة

أما الحالة الأخيرة وفيها يكون معامل المرونة يساوي إلى مالا نهاية $e_o= \infty$ ، عندها يكون العــرض لا نهائي المرونة.

مثال تطبيقي:

إذا زاد سعر سلعة معينة من 10 دنانير إلى 12 دينار، فإذا علمت أن الكمية المعروضة زادت من 100 وحدة إلى 130 وحدة ، فأوجد مرونة العرض لهذه السلعة ، ثم بين فيما إذا كان العرض مرنا أو غــير مرن؟

الحل:

$$e_O = \frac{q_2 - q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{q_1 + q_2}$$

$$e_O = \frac{130 - 100}{12 - 10} \times \frac{22}{230} = 1{,}435$$

يلاحظ بأن مرونة العرض أكبر من الواحد الصحيح ، وفي هذه الحالة يوصف عرض السلعة بأنه مرن أو مرن نسبيا.

محددات مرونة العرض[2]:

المقصود بمحددات مرونة العرض، الأمور أو العوامل التي تحدد درجة مرونة العرض، أي العوامل التي تجعل العرض مرنا أو قليل المرونة أو غير مرن تماما، ومن أهم هذه العوامل نذكر:

1ـــ القدرة الإنتاجية:

بطبيعة الحال، يلاحظ أنه كلما كان المنتج قادرا على التوسع وزيادة إنتاجه لسلعة ما كلما كان عرض تلك السلعة مرنا، فإذا ارتفع سعر السلعة مثلا ، يستطيع المنتج زيادة إنتاجه منها بالكمية الكافية طالما يستطيع زيادة القدرة الإنتاجية لديه، والعكس صحيح.

2ـــ مدى قابلية السلعة للتخزين:

تتوقف مرونة العرض ـــ في الفترة القصيرةـــ على قابلية السلعة للتخزين وحجم المخزون منها، بحيث إذا انخفض سعر السلعة وكانت السلعة قابلة للتخزين يستطيع المنتج تخفيض المعروض منها عن طريق حجب كمية السلعة المنتجة عن السوق في المخازن، وإذا ارتفع سعرها يقوم المنتج بطرحه في السوق ، وهنا نقول أن عرض السلعة مرن ، أما إذا كانت السلعة غير قابلة للتخزين فعندها يتعذر على المنتج فعل ذلك ويكون عرض السلعة قليل المرونة.

3ـــ قابلية السلعة للتلف (طبيعة السلعة)

إذا كانت السلعة بطبيعتها سريعة التلف يكون عرضها عادة قليل المرونة، وذلك لعدم قدرة المنتج على تخزين هذه السلع كالفواكه والخضروات، أما إذا كانت قابلية هذه السلعة للتلف قليلة فيكون عرضها عادة مرنا.

---

[2]) حسام داود وأخرون، مبادئ الاقتصاد الجزئي، ص 136 و ما بعدها

4ــ الفترة اللازمة للإنتاج:

تختلف السلع فيما بينها من حيث المدة اللازمة لإنتاجها، فبعضها يتطلب انتاجه فترة زمنية طويلة ، ومثل هذه السلع تكون مرونة عرضها منخفضة إذ أن استجابة العرض للتغير في السعر لن تحدث إلا بعد فترة زمنية طويلة، أما السلع التي تحتاج إلى فترة زمنية قصيرة لانتاجها، فإن مرونة عرضها تكون كبيرة لأن الكمية المعروضة منها تستجيب للتغير في السعر بسرعة. ومن مثال النوع الأول المنتجات الزراعية بصفة عامة، والنوع الثاني بعض المنتجات الصناعية.

5ــ مرونة عناصر الإنتاج:

يمكن القول أن مرونة العرض من سلعة ما تتوقف، في المدة القصيرة والطويلة، على قابلية عناصر الإنتاج للانتقال بين الاستخدامات المختلفة أي بين خطوط الإنتاج المختلفة، فإذا كانت عناصر الإنتاج قابلة للانتقال من فرع انتاجي إلى آخر ، فإن تغير في سعر السلعة يؤدي إلى تغير في المعروض منها، ذلك لأن ارتفاع سعر السلعة يؤدي إلى اتجاه عناصر الإنتاج لإنتاجها فيزيد المعروض منها، وانخفاض سعرها يؤدي إلى انصراف عناصر الاتجاه عنها وتوجهها إلى سلع أخرى مرتفع سعرها ، وبالتالي ينخفض عرضها، وفي الحالتين تكون مرونة العرض مرنا، أما إذا تعذر على عناصر الإنتاج الانتقال من فرع انتاجي لآخر تكون مرونة العرض منخفضة.

6ــ طول الفترة الزمنية:

تتغير مرونة العرض حسب طول الفترة الزمنية التي يتم فيها بحث مدى استجابة الكمية المعروضة من سلعة ما للتغير في سعرها، ومن المتوقع ــ مع افتراض بقاء العوامل الأخرى ثابتةــ وجود علاقة طردية بين مرونة العرض وطول الفترة الزمنية.

المحاضرة 3

القسم الثالث: نظرية توازن السوق

لقد تم تحليل سلوك المستهلك والذي يمثل جانب الطلب على المنتجات في القسم الأول، وتم تحليل سلوك المنتج والذي يمثل جانب العرض للمنتجات في القسم الثاني من البرنامج.

إن التقاء الطلب والعرض على السلعة عند مستوى معين من السعر والكمية، يحدد لنا توازن السوق بالنسبة لتلك السلعة، لكن كيف تتحدد الأسعار التوازنية؟

إن الإجابة على هذا التساؤل تختلف باختلاف نظام السوق موضع البحث، فالأسواق تتباين من حيث مدى سلطة البائع أو سلطة المشتري في التأثير في السعر ارتفاعا أو انخفاضا، ويرجع هذا التباين إلى مدى التنافس الذي يواجهه كل من البائعين والمشترين، أو ما يتمتع به كل من الجانبين من قوة احتكارية.

وهكذا فإن الاختلاف بين سوق وأخرى يمكن أن نرجعه أساسا إلى سيادة أحد عنصرين بالنسبة للعنصر الآخر، الأول عنصر المنافسة والثاني عنصر الاحتكار، وينتج عن ذلك أنواع متعددة من الأسواق، بدءا بما يسمى سوق المنافسة الكاملة، حيث يسود عنصر المنافسة وينتفي تماما عنصر الاحتكار، وانتهاء بسوق الاحتكار التام حيث يسود عنصر الاحتكار وينتفي تماما عنصر المنافسة ، وبينهما نجد سوق المنافسة غير الكاملة والتي تضم سوق المنافسة الاحتكارية وسوق احتكار القلة.

وفيما يلي عرض موجز لمواصفات كل سوق من هذه الأسواق:

أولا سوق المنافسة الكاملة:

يحدد الفكر الرأسمالي الشروط التي يجب أن يتسم بها السوق حتى يعتبر سوق منافسة كاملة، وتتمثل هذه الشروط فيما يلي:[3]

1ـــ تعدد البائعين وتعدد المشتري، وضآلة نصيب كل منهم من العمليات التي تجري في السوق بحيث أن انسحاب واحد منهم أو عودته بعد غيابه، لا يؤثر على السعر السائد في السوق.

2ـــ تجانس السلعة التي يجري عليها التعامل في السوق، بحيث يعتبر المستهلك كل واحدة منها متساوية تماما مع أية وحدة أخرى منها.

[3]) سحنون محمد، محاضرات في التحليل الاقتصادي الجزئي، ص 150 وما بعدها

3ـــ حرية الدخول في السوق أو الخروج منه، والحرية هنا لا تعني فقط حرية المشتري أن يشتري أو لا يشتري، وحريته في أن يشتري الكمية التي يشاء، وحرية البائع في أن يبيع أو يمتنع عن البيع وحريته في أن يبيع الكمية التي يشاء، ولكنها تعني بالإضافة إلى ذلك حرية المنتجين في أن يدخلوا ميدان الإنتاج لهذه السلعة وحريتهم في أن يخرجوا من هذا الميدان وقت ما شاءوا.

4ـــ العلم الكامل بظروف السوق، أي أن يكون في مقدور كل من المشترين والبائعين أن يتعرفوا على الأسعار التي تعرض بها السلعة للبيع أو تطلب للشراء.

5ـــ ألا يؤدي انتقال السلعة من مكان إلى آخر داخل السوق إلى تحمل البائع أو المشتري تكاليف إضافية تضاف إلى السعر، بمعنى آخر، ألا يعمل المشتري حسابات لتكاليف نقل السلعة عندما يبحث داخل السوق عن أرخص بائع يستطيع الشراء منه، وألا يعمل البائع حسابا لتكاليف نقل السلعة عندما يبحث داخل السوق عن المشتري الذي يستطيع أن يبيع له بأعلى سعر ممكن.

6ـــ أن لا تكون هناك عوائق أو حواجز تمنع عوامل الإنتاج المختلفة من أن تنتقل إلى ذلك الفرع الذي ينتج السلعة، إذا كان هناك اتجاه للتوسع في إنتاجها، أو أن تنتقل من الفرع الذي ينتج السلعة، إذا كانت ظروف السوق تتطلب تضييق هذا الإنتاج، على أن أهمية هذا الشرط الأخير لا تظهر عندما ندرس السعر في السوق في المدى القصير، وإنما تظهر أهميته عند دراسة تكون السعر في المدى الطويل.

ثانيا : سوق الاحتكار التام (المطلق)

يعتبر هذا النوع من الأسواق نقيضا لسوق المنافسة الكاملة، إذ يسود تماما عنصر الاحتكار، وينتفي عنصر المنافسة.

ويقال أن السوق في حالة احتكار تام إذا توافرت فيه الشروط (الخصائص) التالية:[4]

1ـــ وجود بائع (منتج) واحد في السوق ويترتب على ذلك أن البائع يستطيع تحديد السعر الذي يراه مناسبا لسلعته، فهو يستطيع بموجب السلطة الاحتكارية التي يتمتع بها بانتهاج سياسة سعرية مستقلة به، وفي هذه الحالة نقول أن المحتكر هو واضع أو محدد السعر، غير أنه ينبغي ملاحظة أن المحتكر لا يستطيع تحديد السعر والكمية معا، فإما أن يحدد السعر تاركا تقرير الكمية لمستهلكين أو يحدد الكمية التي يرغب في بيعها على أن يتقرر السعر بحسب طلب السوق.

[4]) حسام داود وآخرون، مبادئ الاقتصاد الجزئي، مرجع سابق، ص 39 وما بعدها

2ــ عدم وجود بدائل جيدة للسلعة التي ينتجها المحتكر، لأن المحتكر هو المنتج (البائع) الوحيد للسلعة.

3ــ وجود عوائق رئيسية (مادية أو قانونية) تحول دون دخول آخرين إلى هذا الفرع من الإنتاج، ويضمن بذلك المحتكر أن يظل السوق قاصرا عليه.

وفي الواقع عناك عوائق كثيرة تسمح بإغلاق باب الدخول إلى السوق، فقد يسيطر المحتكر على مصادر المواد الخام اللازمة لإنتاج سلعته، وقد يحتفظ ببراءة الاختراع مما يمنع المشروعات الأخرى من تكرار منتجاته، كما قد يكون المشروع حاصلا على ترخيص من الحكومة تحرم بموجبه المشروعات الأخرى من مزاولة نفس النشاط، وهناك أساليب أخرى يلجأ إليها المحتكر للسيطرة على السوق كتخفيض السعر إلى المستوى الذي يعرض المشروعات المنافسة للإفلاس أو يستغل نفوذه للضغط على البنوك أو مصادر المواد الأولية لكي تمتنع عن إقراض غيره من المشروعات أو عن تدبير احتياجاتها من مستلزمات الإنتاج.

ثالثا: سوق المنافسة الاحتكارية

تشير المنافسة الاحتكارية إلى التنظيم السوقي الذي يتوافر فيه العديد من المنشآت التي تبيع سلعا متقاربة ببعضها تقاربا وثيقا ولكنها ليست متجانسة، ومثال ذلك الأنواع المختلفة للأدوية الخاصة بالصداع، كالأسبرين والباراسيتامول ودوليبخان وبانادول....، وكذا الماركات المختلفة للسيارات .....، وبسبب تميز هذه المنتجات عن بعضها البعض يكون للبائع بعض السيطرة على السعر الذي يحصله، ولكن وجود العديد من البدائل القريبة يحد من قدرته الاحتكارية بشكل ملحوظ.

يتضح مما سبق أن هذا التنظيم يتطلب تحقق ثلاثة شروط:

1ــ تعدد البائعين (المنتجين) للسعلة: بمعنى أن يقدم السلعة إلى المستهلكين عدد كبير من البائعين، بحيث لا يتأثر في اتخاذ قراراته بما يفعله غيره، وعلى أساس أن غيره من البائعين يتصرفون على نفس الأساس، أي أن تصرف البائع هنا يشبه تماما تصرف البائع في سوق المنافسة الكاملة.

2ــ عدم التجانس بين وحدات السلعة التي يقوم بعرضها هو وغيره من المنتجين: بمعنى أن المستهلك يفرق بين وحدات السلعة تبعا للبائعين أو تبعا لدرجة الإشباع، ويرجع عدم التجانس من وجهة نظر المستهلك إلى أسباب مختلفة، قد لا تكون أسبابا موضوعية كاختلاف الجودة، ولكن أسبابها صورية نجح

البائع في خلقها لدى المستهلك (ربما عن طريق الإعلان أو حسن التغليف والعرض ، أو عن طريق حسن المعاملة، ...)

ونتيجة عدم التجانس، يصبح لكل من البائعين سوقه الخاص، الأمر الذي يعطي لهذا البائع نوعا من السلطة التي تشبه سلطة المحتكر، لكنها سلطة محدودة لأنه يخشى دائما انصراف المستهلكين عنه.

3ـــ سهولة الدخول إلى السوق والخروج منه: أي أنه ليس هناك عوائق دخول رئيسة وهكذا تتشابه المنافسة الاحتكارية في هذا المجال مع المنافسة الكاملة.

وهذا نرى أن التعدد يعطي هذا السوق صفة من صفات سوق المنافسة، وأن عدم تجانس السلعة يعطيه صفة من صفات سوق الاحتكار، ومن هنا كانت التسمية "المنافسة الاحتكارية"

رابعا: سوق احتكار القلة

يتميز هذا النوع من السوق بوجود عدد قليل من البائعين لسلعة ما، لكل منهم دور بارز في تحديد الكمية والسعر، فالكمية التي يعرضها كل منهم من السلعة تمثل جزءا هاما من عرض السلعة بأكمله، ويترتب على ذلك أن كل بائع (منتج) لا يتصرف في معزل عن قرارات غيره من البائعين، حين يتخذ قرارا بشأن السعر الذي يطلبه، والكمية التي يعرضها، كما يفترض أن غيره م البائعين سيتصرفون على نفس الأساس، آخذين في الحسبان قراراته هو. وبصفة مختصرة يتميز هذا النوع من السوق بالخصائص التالية:

1ـــ عدد قليل من المشروعات تتقاسم فيما بينها القدر الأعظم من السوق.

2ـــ السلع قد تكون مصنفة أي غير متجانسة وهذا هو الغالب ، لكن لا يمنع أن تكون السلع متجانسة.

3ـــ بصفة عامة يصعب على المشروعات الأخرى الدخول إلى هذا الميدان.

من خلال نظرية توازن السوق سنتعرف على كيفية تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية في سوق سلعة معينة ، وذلك في ظل المنافسة الكاملة ثم في ظل المنافسة غير الكاملة، نتناول بالتحليل الموضوعين في فصلين مستقلين.

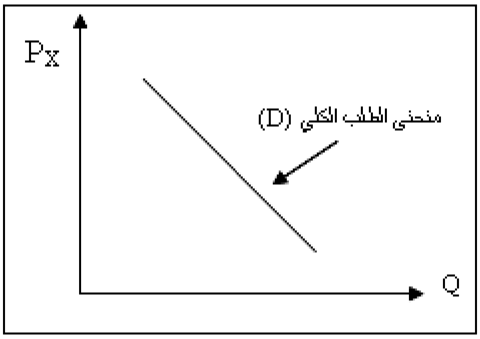
الفصل الأول: توازن السوق في ظل المنافسة الكاملة

المبحث الأول: تحديد مستوى التوازن (السعر التوازني والكمية التوازنية)

عندما تجتمع كل الشروط الخاصة بالمنافسة الكاملة، فإنه ليس بوسع أي بائع أو مشتري التأثير على سعر السوق، هذا لأن السعر الذي يمثل المتغير المراد تحديد قيمته، لا يمكن أن يتحدد إلا باشتراك كل البائعين وكل المشترين، أو بعبارة أخرى فهو يتحدد من خلال تحديد الطلب الإجمالي والعرض الإجمالي لسلعة معينة.

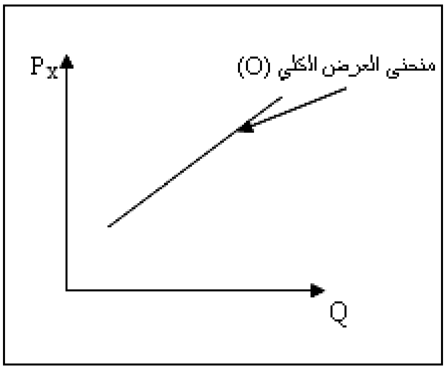
ويمثل الطلب الإجمالي (أو الكلي) مجموع الكميات المطلوبة من سلعة معينة ولتكن x من طرف n مستهلك. إذا رمزنا للطلب الكلي بالرمز D، وافترضنا أن الطلب على السلعة يتأثر فقط بسعرها وباقي المتغيرات الأخرى (دخل المستهلك وأسعار السلع الأخرى والأذواق...) ثوابت فإن دالة الطلب الكلي تكتب على الشكل التالي[5]: $D = \sum_{i=1}^{n} f_i(p_x) = f(p_x)$

وبما أن دالة طلب كل مستهلك من n مستهلك يعتبر دالة متناقصة بالنسبة للسعر p_x ، فإن دالة الطلب الكلية كذلك تعتبر دالة متناقصة بالنسبة إلى السعر p_x. وتمثل بيانيا على الشكل التالي:



ونفس الشيء بالنسبة لدالة العرض الكلي، والتي تمثل مجموع الكميات المعروضة من طرف n منتج ، هي أيضا دالة في سعر السلعة p_x ، إذا افترضنا أن باقي العوامل الأخرى التي يتأثر بها العرض ثوابت، إذا رمزنا للعرض الكلي بالرمز O ، فإن دالة العرض الكلي تكتب على الشكل: $O = \sum_{i=1}^{n} g_i(p_x) = g(p_x)$، وهي دالة متزايدة في سعر السلعة، وتمثل بيانيا كالتالي:

5) Pierre Picard , Op Cit, P269



المبحث الثاني: توازن السوق في الفترة القصيرة

يتحقق توازن السوق في ظل المنافسة الكاملة (وهذا بالنسبة لسلعة معينة)، إذا كانت الكمية المطلوبة من السلعة تساوي الكمية المعروضة منها أي :

$$D = O$$
$$f(p_x) = g(p_x)$$

وهذا الشرط يحدد في نفس الوقت سعر وكمية التوازن، فإذا كان سعر السوق، أكبر من سعر التوازن فإن عدد من المشترين سيحجمون عن الشراء فيكون بذلك العرض أكبر من الطلب ، والمنافسة بين المنتجين تجعلهم يخفضون في السعر حتى يتمكنوا من تصريف منتجاتهم، فيعود السعر إلى مستوى التوازن.

وإذا كان سعر السوق أقل من سعر التوازن، وهي الحالة المعاكسة، سيكون بذلك الطلب أكبر من العرض، إذ أن السعر المحدد لا يسمح لبعض المنتجين بتغطية تكاليف إنتاجهم، فيحجمون عن إنتاج السلعة، والمنافسة بين المشترين تجعلهم يدفعون سعر أعلى من أجل الحصول على السلعة، مما يرفع السعر إلى سعر التوازن.

فالسعر التوازني هو الوحيد الكفيل بإحداث توافق بين الطالبين والعارضين، وهو سعر وحيد.

مثال تطبيقي:

لنفرض أن دالتي الطلب والعرض على السلعة X ، في سوق تسوده المنافسة الكاملة،هما على الشكل التالي:

$D=35-3P_x$ ، $O=2P_x$

والمطلوب هو تحديد سعر وكمية التوازن للسلعة x.

الحل:

عند التوازن يكون العرض يساوي الطلب أي :

$$O=D \quad \Rightarrow \quad 2P_X=35-3P_X$$
$$\Rightarrow \quad P_X=7$$

وهو سعر التوازن ، وبالتعويض في دالة العرض أو دالة الطلب نحصل على كمية التوازن :

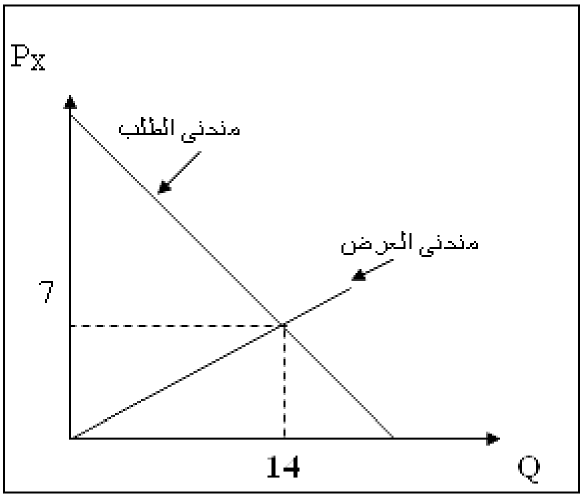
$O=D=14$

التمثيل الهندسي للنقطة التوازن السابقة:

لتمثيل دالتي العرض والطلب بيانيا، يكفي إعطاء قيم عشوائية لـــ p_x ، وحساب الكمية المعروضة والمطلوبة ، والتكن هذه القيم تلك الموضحة في الجدول التالي:

P_x	5	7	8
$D=35-3P_x$	20	14	11
$O=2P_X$	10	14	16

ويمثل التمثيل البياني أن نقطة التوازن هي نقطة تقاطع
منحنى العرض مع منحنى الطلب



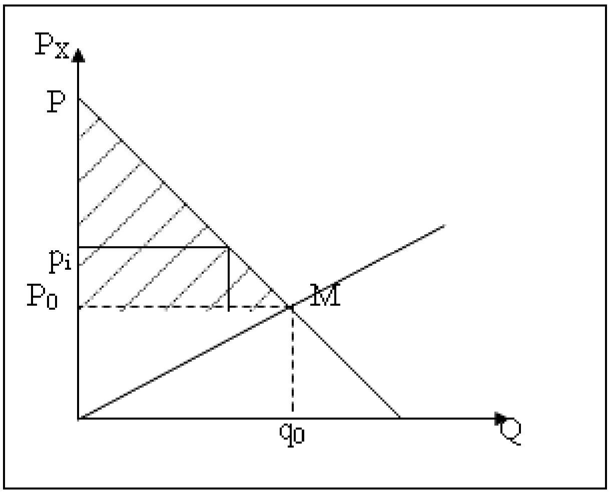
فائض المستهلك La rente de consommateur:

عرفنا في القسم الأول من البرنامج معنى فائض المستهلك، وأنه يعبر عن الفرق بين المبلغ الذي كان المستهلك مستعدا لدفعه للحصول على سلعة معينة، والمبلغ الذي يدفعه فعلا والذي حددته آلية السوق أي قوى العرض والطلب.

في ظل المنافسة الكاملة قد يتحدد السعر عند مستوى أقل مما توقعه المستهلك نتيجة تنافس البائعين فيما بينهم، وبالتالي فهو يحقق وفر ذاتي يتمثل في الفرق بين السعرين.

يمكن تمثيل فائض المستهلك وحسابه بيانيا كالتالي:

الشكل التالي يمثل حالة توازن السوق في ظل المنافسة الكاملة:



إن تقاطع منحنى العرض مع منحنى الطلب يحدد لنا سعر التوازن P_0 وكمية التوازن q_0.

بفرض أن المستهلك يستطيع أن يدفع سعرا أكبر من سعر التوازن: $P_i>P_0$ ، فهو بذلك يتمتع بفائدة أو ربح ذاتي يقدر بـــ $P_i - P_0$،

إن الفرق بين المستويات المختلفة من السعر الذي يستطيع المستهلك أن يدفعه و سعر التوازن، تمثل فائض المستهلك، وهي ممثلة في الرسم البياني بمساحة المثلث المؤشرة MP_0P.

هذه المساحة يمكن حسابها بطريقتين:

ط 1) مساحة المثلث وتساوي إلى (القاعدة × الارتفاع) / 2 أي $\frac{P_0P \times P_0M}{2}$

ط 2) باستخدام التكامل: المساحة المؤشرة يمكن التعبير عنها بتكامل معرف كما يلي:

$$\int_0^{q_0} Pdq - P_0 \cdot q_0$$

حيث P_0 هو سعر التوازن

Q_0 كمية التوازن

P دالة الطلب على السلعة

مثال تطبيقي:

لدينا دالة الطلب على الشكل: $P=-2q+10$، ودالة العرض من الشكل: $P=2q$

المطلوب : أحسب فائض المستهلك

الحل:

أولا يجب إيجاد سعر وكمية التوازن

يتحقق التوازن لما يتساوى العرض مع الطلب، أي :

$$2q = -2q + 10 \quad \Rightarrow \quad q_0 = 2{,}5 \quad , \quad P_0 = 5$$

ثانيا: حساب فائض المستهلك باستخدام التكامل:

$$\int_0^{2,5} (-2q+10) - 5 \times 2{,}5 = \left[-q^2 + 10q\right]_0^{2,5} - 12{,}5$$

$$= 6{,}25$$

ثالثا: حساب فائض المستهلك بطريقة مساحة المثلث:

قاعدة المثلث: $q_0=2{,}5$

ارتفاع المثلث: من دالة الطلب لما $q=0$ فإن $P=10$ ولدينا $P_0=5$ ، إذن ارتفاع المثلث يساوي 5

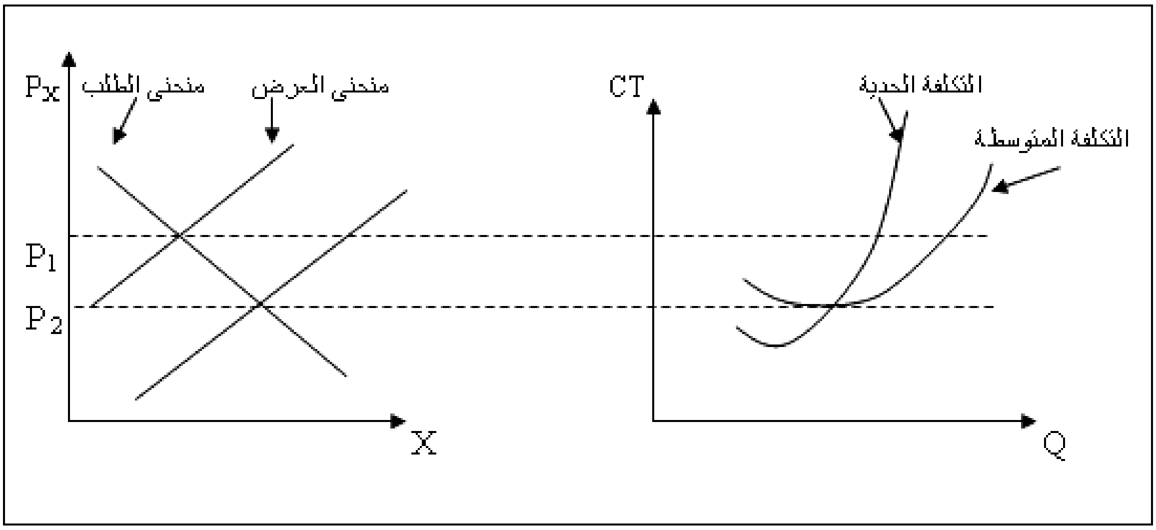
فائض المستهلك : $\frac{(10-5)\times 2,5}{2} = 6,25$

المبحث الثالث: توازن السوق في الفترة الطويلة

تتحدد نقطة توازن السوق في المدى الطويل عندما يتلاقى منحنى العرض للمدى الطويل مع منحنى الطلب المقابل.

إن الفترة الطويلة تتيح الفرصة للمؤسسات لتعديل مخططاتها الإنتاجية بحسب ظروفها الخاصة، فالمنشآت التي تحقق أرباحا صافية ستجد في ذلك دافعا لمواصلة الإنتاج ولزيادة طاقتها الإنتاجية الأمر الذي يجذب مؤسسات جديدة للدخول في السوق في حين أن المؤسسات التي تتكبد خسارة في الأجل القصير ولا تستطيع أن تتفاداها في الزمن الطويل ستضطر إلى الخروج من السوق.

وهذه الحرية في الدخول أو الخروج من السوق، وفي تعديل خطط إنتاج المؤسسات القائمة، ستؤدي في النهاية إلى حصول جميع المنتجين على الربح العادي فقط وهو الربح الذي يضمن استمرار المؤسسة في السوق، أي عندما يصل إنتاجها إلى مستوى يقابل أدنى قيمة للتكلفة المتوسطة في الأجل الطويل، ومتى تحقق ذلك تتوقف حركة الدخول أو الخروج من السوق، ويقال حينئذ أن السوق في حالة توازن طويل الأجل.



فإذا حدث وأن كان تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض للمدى الطويل عند سعر يكون أعلى من أدنى قيمة لــ CTM_{LT} ، أي أن المنشآت تحقق أرباحا تفوق الأرباح العادية، فإنه من الممكن

دخول وحدات إنتاجية أخرى، في ظل حرية الدخول إلى السوق، وهذا بالطبع يزيد في حجم العرض الكلي للسلعة مما يؤدي إلى انخفاض السعر التوازني (منحنى العرض الكلي ينتقل إلى اليمين فتنخفض نقطة تقاطعه مع منحنى الطلب الكلي)، وسيستمر الوضع (دخول منتجين جدد) إلى أن يصل السعر إلى المستوى الذي لا يحقق فيه المنتجين أرباحا (الربح يساوي الصفر)

وفي الحالة المعاكسة، إذا كان تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض للمدى الطويل عند سعر أقل من أدنى قيمة لـــ CTM_{LT}، أي أن المؤسسات تحقق خسائر ، فالبعض منها تنسحب من السوق وينخفض العرض الكلي مما يجعل سعر التوازن يرتفع (انتقال منحنى العرض للمدى الطويل ينتقل إلى اليسار)، ويستمر في الارتفاع إلى أن يصل إلى مستوى أدنى قيمة لـــ CTM_{LT}، أين تكون قيمة الخسائر تساوي الصفر.

إذن يمكن القول أن توازن السوق في المدى الطويل ، لا يقترض فقط المساواة بين الطلب الإجمالي والعرض الإجمالي، ولكنه يفترض أيضا أن تكون الأرباح معدومة.

المحاضرة 4

الفصل الثاني: توازن السوق في ظل المنافسة غير الكاملة

دائما إن القاعدة العامة لتوازن السوق هو تلاقي منحنى عرض السوق ومنحنى طلب السوق، ولما كنا في سوق تتسم بالاحتكار فإن منحنى عرض السوق هو نفسه منحنى عرض الجهة المحتكرة، أما منحنى الطلب فهو يتماثل تماما مع أي منحنى طلب على سلعة أخرى أي أنه ذو ميل سالب وينحدر من الأعلى إلى الأسفل ، وتوازن السوق هنا متوقف على توازن الجهة المحتكرة، وشرط التوازن هنا أيضا هو نفسه كما في حالة المنافسة الكاملة وهو تساوي الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية . وهي النقطة التي يحقق فيها المحتكر أعظم ربح ممكن.

وبالتالي لمعرفة توازن السوق في حالة الاحتكار يكون من خلال معرفة كيف يعظم المحتكر ربحه.

المبحث الأول : الإيراد المتوسط والكلي والحدي للمحتكر

في نظام الاحتكار، تكون زيادة الكمية المباعة متبوعة عادة بانخفاض في السعر، والإيراد الحدي أي الإيراد الإضافي الناتج عن زيادة المبيعات يكون إذن متناقص.

والإيراد الكلي للمحتكر يساوي إلى حاصل ضرب سعر السلعة P_X في الكمية المنتجة والمباعة X أي : $R= X.P_X$

ونعلم أن الإيراد الحدي هو الزيادة (التغير) في الإيراد الكلي الناتج عن زيادة (التغير) الكمية المباعة أي هو مشتقة دالة الإيراد الكلي بالنسبة للكمية المنتجة والمباعة أي : $R' = \frac{dR}{dX} = P_X$

وفي حالة الاحتكار يتأثر الإيراد الحدي بدرجة مرونة الطلب على السلعة، والعلاقة بين السعر والإيراد الحدي والمرونة e_d هي:

$$R' = P_X\ (1+\frac{1}{e_d})$$

وهذا خلافا لحالة المنافسة الكاملة أين يتساوى الإيراد الحدي مع السعر لأن مرونة الطلب تساوي إلى $(-\infty)$ مما يجعل الكسر يؤول إلى الصفر والقيمة ما بين القوسين تساوي إلى الواحد الصحيح.

أما الإيراد المتوسط فهو حاصل قسمة الإيراد الكلي على حجم السلعة المنتجة والمباعة أي: $RM = \frac{RT}{X}$

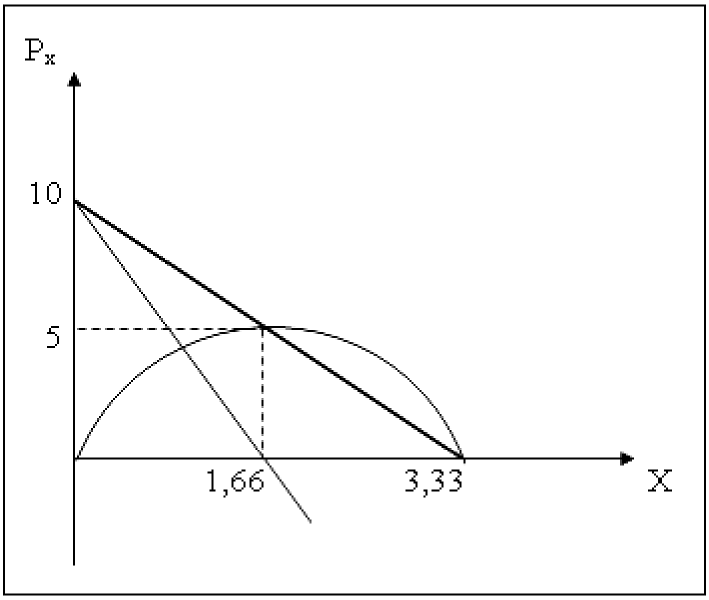
* لنعتبر على سبيل المثال دالة الطلب من الشكل: $P_X = 10 - 3X$

حيث X تمثل الكمية المطلوبة من طرف المستهلكين، وبالتالي الكمية المنتجة والمباعة من طرف المحتكر الذي يعتبر البائع الوحيد.

لتمثيل منحنى الطلب بيانيا نحتاج فقط نقطتين (دالة خطية) ، ولتكونا النقطتين المتطرفتين:

من أجل $P_X=O$ يكون $X=3,3$

من أجل $X=0$ يكون $P_X=10$



إن المستقيم الممثل بالخط الغليظ يمثل دالة الطلب السابقة، وهو نفسه يعبر عن منحنى الإيراد المتوسط ، حيث :

دالة الإيراد الكلي للمحتكر هي:

$$\begin{aligned} RT &= P_X \cdot X \\ &= (10-3X).X \\ &= 10X - 3X^2 \end{aligned}$$

وبالتالي دالة الإيراد المتوسط هي : $RM = \frac{RT}{X} = 10 - 3X$ وهي نفسها دالة الطلب.

والملاحظ أن دالة الإيراد الكلي هي دالة من الدرجة الثانية حيث تمثل بيانيا بقطع مكافئ، ويكون الإيراد الكلي معدوما إذا كانت الكمية المباعة معدومة أو إذا كان السعر معدوما، ويصل منحنى الإيراد الكلي إلى أقصى قيمة له عندما تنعدم المشتقة الأولى (الإيراد الحدي = 0)، والمشتقة الثانية تكون أقل من الصفر:

المشتقة الأولى (الإيراد الحدي) = 0

$$R' = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 6X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 1{,}66$$

المشتقة الثانية < 0 أي: $R'' = -6$

وعندها يكون السعر $P_X = 5$

والملاحظ أن دالة الإيراد الحدي أيضا دالة خطية ($R' = 10 - 6X$) وتنطلق من نفس نقطة انطلاق الإيراد المتوسط أو منحنى الطلب أي $X=0$ ، $R'=10$

ومن الشكل البياني نلاحظ أن الإيراد الحدي يكون موجبا طالما أن الطلب يكون مرنا $(e_d>1)$ ، حيث أن انخفاض سعر السلعة بنسبة معينة يؤدي إلى زيادة الطلب عليها بنسبة أكبر وبالتالي يزيد الإيراد الكلي، فيكون الإيراد الحدي موجبا.

وينعدم الإيراد الحدي عندما تساوي مرونة الطلب الواحد الصحيح $(e_d=1)$ ، حيث انخفاض سعر السلعة بنسبة معينة يؤدي إلى زيادة الطلب على السلعة بنفس النسبة وهذا يجعل الإيراد الكلي ثابتا وبالتالي الإيراد الحدي منعدم.

والحالة الأخيرة ، عندما تكون مرونة الطلب غير مرن أي $(e_d<1)$ ، فإن انخفاض السعر بنسبة معينة يؤدي إلى زيادة الطلب على السلعة بنفس أقل مما يؤدي إلى انخفاض الإيراد الكلي، وبالتالي يصبح التغير (الإيراد الحدي) سالبا.

المبحث الثاني: تعظيم الربح في حالة الاحتكار

إن ربح المحتكر (كما بالنسبة لأي منتج آخر) يتمثل في الفرق بين الإيرادات الكلية والتكلفة الكلية أي:

$$P=RT-CT$$

وقد توصلنا في الفصول السابقة إلى قاعدة عامة فحواها أن المنتج يحقق أقصى ربح عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي أي : $R'=Cm$ ، مع افتراض أن المشتقة الثانية لدالة الربح سالبة:

$$R'' - Cm' < 0 \quad \Rightarrow \quad R'' < Cm'$$

أي معدل زيادة التكلفة الحدية أكبر من معدل زيادة الإيراد الحدي،

بالفعل ، أنه إذا كانت زيادة الإنتاج تؤدي دائما إلى زيادة الإيرادات بمعدل أكبر من زيادة التكاليف، فإنه من فائدة المحتكر أن يزيد الإنتاج، وهذا يعني أن وضع التوازن الذي يحدده الشرط الأول أي $R'=Cm$ ، ليست مستقرة، وعادة ما نفترض أن وضع التوازن يكون مستقرا لما تتحقق مساواة بين إيراد حدي متناقص وتكلفة حدية متزايدة.

مثال تطبيقي:

من دالة الطلب السابقة: $P_X= 10-3X$ ، ومنه دالة العرض : $RT=10X-3X^2$

وإذا اعتبرنا دالة التكلفة الكلية من الشكل: $CT=X^2 +2X$

فإن الربح الإجمالي للمحتكر يكون معطى بالدالة: $P= R – CT$

$$P = 10 X – 3X^2 – X^2 – 2X = 8X – 4X^2$$

ويكون هذا الربح أعظمي لما :

$$R' = Cm$$
$$10 - 6X = 2X + 2$$
$$X = 1$$

والشرط الثاني : $Cm' = 2$, $R'' = -6$

وبما أن : $2 > 6-$، نستنتج أن التوازن مستقر والمحتكر يتحقق أعظم ربح، والسعر الذي يعرض به منتجاته وهو سعر التوازن نستخرجه من دالة الطلب:

من أجل $X=1$ ، $P_X=10-3=7$

والربح الإجمالي للمحتكر يكون: $P = R - C = 8(1) - 4(1)^2 = 4$

تمارين تطبيقية (السلسلة الثانية)

دالة الإنتاج /دالة التكلفة/ دالة العرض

التمرين (10):

نفترض أن دالة إنتاج مؤسسة ما تأخذ الشكل التالي: $q=(K-1)^{1/3}(L+4)^{1/6}$

وفي وضعية التوازن تستخدم المؤسسة وحدتين من K (K=2) و 60 وحدة من L (L=60) ، وذلك بتكاليف إجمالية قدرها: CT=158

المطلوب:

1) أوجد سعر الوحدة من عنصري الإنتاج

2) أوجد معادلة مسار توسع المؤسسة

3) أحسب ربح هذه المؤسسة علما أن سعر الوحدة المباعة P=100

التمرين (11):

نفترض أن مؤسسة إنتاجية تقوم بإنتاج سلعة Q وذلك باستخدام عنصر العمل وعنصر رأس المال، فإذا علمت أن دالة الإنتاج لها من الشكل: $q=2\sqrt{L}\sqrt{K}$، نسمي P_q سعر الوحدة من q، P_L سعر عنصر العمل، P_K سعر الوحدة من رأس المال.

المطلوب:

1ــ حدد عبارة الطلب على العمل L عندما يكون رأس المال ثابت ويساوي K=4، ما هي خصائص المنحنى المحصل عليه

2ــ حدد قيمة الربح عند الحل الأمثل، عندما $P_q=2$ ، $P_L=1$ ، $P_K=2$

3ــ بالتخلي عن فرضية ثبات رأس المال، حدد معادلة مسار التوسع بالنسبة لهذه المؤسسة.

رابعا: دالة التكاليف

التمرين (12):

لدينا دالة إنتاج من الشكل $q=4K^{2/3}L^{1/3}$، وكانت أسعار عوامل الإنتاج كالتالي: $P_L=3$ ، $P_K=2$

المطلوب :

1ــ أحسب الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافق لحجم الإنتاج : Q=100

2ــ أوجد دوال النفقة الكلية والمتوسطة والحدية بدلالة حجم الإنتاج q

ملاحظة: نعتبر المقدار $\sqrt[3]{9} = \frac{25}{9}$

التمرين (13):

إذا كانت لدينا دالة إنتاج من الشكل: $q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$، وأسعار عوامل الإنتاج $P_L=40$ و $P_K=80$

المطلوب:

1ــ أحسب قيمة التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج 2000 وحدة من السلعة q

2ــ ما هو حجم الإنتاج المحقق بميزانية قدرها CT=6000

3ــ أوجد دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية بدلالة الكمية المنتجة q

التمرين (14):

لتكن لدينا المعطيات المبينة في الجدول المقابل:

1ــ مثل على نفس المنحنى منحنيات التكلفة الكلية والمتغيرة والثابتة الواردة في

الجدول ؟

2ــ اشرح السبب الذي من أجله تأخذ المنحنيات السابقة أشكالها تلك؟

3ــ أوجد كل من متوسط التكلفة الثابتة، متوسط التكلفة المتغيرة،ومتوسط التكلفة الكلية والتكلفة الحدية، ثم مثلها بيانيا؟

Q	CF	CV	CT
0	120	0	120
1	120	60	180
2	120	80	200
3	120	90	210
4	120	105	225
5	120	140	260
6	120	210	330

التمرين (15):

لنعتبر النقاط المكونة لمسار التوسع المحصل عليه في السؤال الأخير من التمرين رقم (9)،

المطلوب:

1ــ أحسب التكلفة الكلية والحدية المحصل عليها على طول هذا المسار؟

2ــ انطلاقا من جدول نفس التمرين، أحسب التكلفة الكلية لإنتاج السلعة q عندما k=2

3ــ ماذا يمكن ملاحظته بالنسبة لمنحنيي التكلفة الكلية المحددين سابقا؟

التمرين (16):

لتكن لدينا دوال التكلفة الكلية للمؤسسات A، B، C، D

$$A)\quad CT_A = 200 + 10q$$

$$B)\quad CT_B = 500 + 8q - \frac{1}{2}q^2$$

$$C)\quad CT_C = 300 + 6q + \frac{1}{2}q^2$$

$$D)\quad CT_D = 20q - 4q^2 + \frac{1}{3}q^3$$

المطلوب:

1ــ أكتب معادلات متوسط التكاليف الثابتة CFM ، والمتغيرة CVM والكلية CT والحدية cm بالنسبة للمؤسسات السابقة

2ــ ماذا يمكن القول عن غلة الحجم بالنسبة لدوال الإنتاج الناتجة عن دوال التكلفة أعلاه ، إذا افترضنا أن التكلفة الثابتة CF في كل دالة تساوي إلى الصفر؟

3ـ مثل بيانيا CM و cm بالنسبة للمؤسسة D على المجال q=0 إلى q=8

4ــ بين بدلالة q أين يبدأ كل من الإنتاج الحدي والمتوسط بالنسبة للمؤسسة D في التناقص؟

خامسا: تعظيم الربح انطلاقا من دالة التكلفة

التمرين (17):

إذا كانت دالة التكلفة معطاة على الشكل: $C = 0{,}02q^3 - 0{,}6q^2 + 7{,}5q + 20$

وعلمنا أن سعر بين الوحدة المنتجة هو : $P_q=5$

المطلوب:

ـــ ماهو حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح ممكن؟ وما هو مقدار هذا الربح؟

التمرين (18):

إذا كانت دالة التكلفة معطاة على الشكل: $q = 0{,}02q^3 - 0{,}8q^2 + 16q + 10$ ، وكان سعر بيع الوحدة $P_q=8$

المطلوب:

ـــ ماهو حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح ممكن؟ وما هو مقدار هذا الربح؟

التمرين (19) :

إذا كانت دالة التكلفة لمؤسسة ما معطاة على الشكل: $CT = 40 + 30q - 10q^2 + q^3$

وكان سعر الوحدة المنتجة $P=5$

المطلوب: تحقق ما إن كانت المؤسسة تحقق ربحا أم لا؟

ـــ هل من صالح المؤسسة أن تنتج عند هذا السعر ؟ ولماذا؟ كيف تسمى هذه الوضعية بالنسبة للمؤسسة؟

سادسا: دالة العرض

التمرين (20):

إذا كانت دالة التكلفة الإجمالية لمؤسسة ما هي : $C = 0{,}1q^3 - 2q^2 + 15q + 10$

1ـــ ما هو الحد الأدنى للسعر P الذي يمكن أن تنتج عنده المؤسسة في المدى القصير؟

2ـــ استنتج دالة العرض للمؤسسة في صورة الكمية بدلالة السعر؟

التمرين (21)

لديك دالة التكلفة الكلية لمشروع ما من الشكل: $CT = 0{,}25q^3 - 4q^2 + 20q + 20$

ـــ أوجد دالة العرض بدلالة السعر ؟

تمارين تطبيقية (السلسلة الثالثة ــ توازن السوق)

التمرين (1) :

لنفرض أن منحنى الطلب معطى بالعلاقة التالية: $D=-50P+250$

ومنحنى العرض هو : $O=\frac{100}{3}P$

حدد مستوى توازن السوق ، ومثله بيانيا؟

التمرين (2):

يعمل مشروع في ظل المنافسة الحرة، لدينا كل من دالة الطلب ودالة العرض:

$$D=-3(P-11) \qquad , \qquad O=\frac{2}{3}P$$

1ــ أحسب كل من سعر وكمية التوازن؟ مثل التوازن هندسيا.

2ــ يتحمل المشروع نفقة كلية معطاة بالجدول التالي:

q	1	2	3	4	5	6	7	8
CT	7	11	13	16	20	27	36	50

ــ ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته؟

3ــ أرسم الخطوط البيانية؟

4ــ متى ينسحب المشروع من السوق؟

التمرين (3):

يعمل مشروع في ظل المنافسة الكاملة، لدينا: $O=\frac{3}{5}P \qquad , \qquad D=12-\frac{3}{5}P$

المطلوب:

1ــ أحسب سعر وكمية التوازن، ثم مثل التوازن هندسيا؟

2ــ لدينا دالة النفقة الكلية للمشروع من الشكل: $CT=\frac{1}{2}q^3-4q^2+16q$

ــ أحسب كل من التكلفة الكلية المتوسطة والتكلفة الحدية

3ــ ما هي شروط تعظيم الربح ؟ أحسب قيمته؟

4ــ متى ينسحب المشروع من السوق؟

التمرين (4):

جدد فيما إذا كان من الممكن أن يوجد حل لتوازن السوق في حالة دوال الطلب والعرض التالية:

1) $D = 12 - 3P \quad ; \quad O = -10 + 2P$

2) $D = 16 - 2P \quad ; \quad O = 20 - 2P$

3) $D = 50 - 4P \quad ; \quad O = 10 + 10P - P^2$

4) $D = 50 - 4P \quad ; \quad O = 2 + 10P - P^2$

التمرين (5):

لتعتبر محتكر ما يواجه دالة الطلب من الشكل: $P = 20 - 0,5q$

حيث p يمثل السعر ، وq الكمية المطلوبة من السلعة q

وإذا كانت دالة التكلفة الإجمالية لهذا المحتكر معطاة بالعلاقة التالية:

$$C = 0,04q^3 - 1,94q^2 + 32,96q$$

المطلوب:

تحديد الربح الأعظمي لهذا المحتكر والكمية الواجب إنتاجها من أجل هذا الربح، وكذلك السعر الذي يبيع به؟

هل التوازن في هذه الحالة مستقر أو غير مستقر؟

حلول تمارين الاقتصاد الجزئي موجهة للفوجين: 03 و04 السنة الأولى جذع مشترك

قائمة المحتويات:

حل التمرين رقم 02 :

$$q = (K-1)^{\frac{1}{3}} (L+4)^{\frac{1}{6}}$$

عند التوازن لدينا : $K = 2$ ، $L = 60$ ، $CT = 158$

1/ إيجاد سعر الوحدة من عنصري الإنتاج L و K :

لدينا شرطان للتوازن هما :

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \ldots (1)$$

$$CT = LP_L + KP_K \Rightarrow 158 = 2P_K + 60P_L \ldots (2)$$

إذن نحن يجب حساب Pmg_L و Pmg_K :

$$Pmg_L = \frac{\delta q}{\delta L} = \frac{1}{6}(L+4)'(L+4)^{\frac{1}{6}-1} . (K-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{6} . 1 . (L+4)^{-\frac{5}{6}} . (K-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Pmg_L = \frac{(K-1)^{\frac{1}{3}}}{6(L+4)^{\frac{5}{6}}}}$$

$$Pmg_K = \frac{\delta q}{\delta K} = \frac{1}{3}(K-1)'(K-1)^{\frac{1}{3}-1} . (L+4)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{3} . 1 . (K-1)^{-\frac{2}{3}} . (L+4)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Pmg_K = \frac{(L+4)^{\frac{1}{6}}}{3(K-1)^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{\frac{(K-1)^{\frac{1}{3}}}{6(L+4)^{\frac{5}{6}}}}{\frac{(L+4)^{\frac{1}{6}}}{3(K-1)^{\frac{2}{3}}}} = \frac{(K-1)^{\frac{1}{3}}}{6(L+4)^{\frac{5}{6}}} . \frac{3(K-1)^{\frac{2}{3}}}{(L+4)^{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{3(K-1)}{6(L+4)} = \boxed{\frac{K-1}{2(L+4)}}$$

ولدينا : $K = 2$ ، $L = 60$

$$\Rightarrow \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{2-1}{2(60+4)} = \frac{1}{128}$$

وحسب الشرط الأول للتوازن:

$$\frac{1}{128} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_K = 128\,P_L} \quad \cdots\cdots (3)$$

نعوض (3) في الشرط الثاني للتوازن:

$$158 = 2\,(128\,P_L) + 60\,P_L$$

$$158 = 316\,P_L \Rightarrow \boxed{P_L = \frac{1}{2}}$$

نعوض بقيمة P_L في العلاقة (3):

$$P_K = 128 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P_K = 64}$$

2/ ايجاد معادلة مسار التوسع: $K = f(L)$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K-1}{2(L+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{64}$$

$$\Rightarrow 64(K-1) = 2(L+4)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 64K - 64 = L + 4$$

$$\Rightarrow 64K = L + 4 + 64$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{L+68}{64}}$$

وهي معادلة مسار توسع المؤسسة

3/ حساب ربح هذه المؤسسة علما أن سعر الوحدة المباعة $p = 100$

الربح $P = RT - CT = P_q \cdot q - CT$

$$q = (K-1)^{\frac{1}{3}}(L+4)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow q = (2-1)^{\frac{1}{3}}(60+4)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \boxed{q = 2}$$

إذن $P = 100 \times 2 - 158$

$$\boxed{P = 42}$$

إذن هذه المؤسسة حققت ربحا قدره: $P = 42$

حل التمرين رقم (11) :

لدينا: $Q = 2\sqrt{L} \cdot \sqrt{K}$ ، $K = 4$

1/ تحديد عبارة الطلب على عنصر العمل L :

ملاحظة①: في العادة نستخرج دالة الطلب على عنصري الانتاج L أو K من الشرط اللازم لتعظيم الانتاج تحت قيد التكلفة وهذا عندما تكون التكلفة معطاة ، لكن في حالة كانت التكلفة CT غير معطاة نستخرج دالة الطلب على عنصري الانتاج L أو K من الشرط اللازم لتعظيم الربح. حيث أن المنتج سيستمر في طلبه على عنصري الانتاج (K,L) إلى النقطة التي تكون فيها الزيادة في الربح نتيجة زيادة عنصر الانتاج تساوي الصفر: $\frac{\delta P}{\delta L} = 0$ ، $\frac{\delta P}{\delta K} = 0$

ملاحظة②: في دالة الطلب نترك P_K و P_L و CT مجهولة (لا نعوض بقيمها)

لدينا:

$$P = RT - CT = P_q \cdot q - CT$$

$$\Rightarrow P = P_q \cdot 2\sqrt{L}\sqrt{K} - (LP_L + KP_K)$$

$$\Rightarrow P = P_q \cdot 2\sqrt{L}\sqrt{K} - LP_L - KP_K$$

لدينا $K = 4$ إذن $\Leftarrow$ $P = P_q \cdot 2\sqrt{L}\sqrt{4} - LP_L - 4P_K$

$$P = 4P_q\sqrt{L} - LP_L + 4P_K$$

الشرط اللازم لتعظيم الربح: $\frac{\delta P}{\delta L} = 0$ و $\frac{\delta P}{\delta K}$

في هذه الحالة نستخدم فقط $\frac{\delta P}{\delta L} = 0$.

$$\frac{\delta P}{\delta L} = \frac{4P_q}{2\sqrt{L}} - P_L = 0 \Rightarrow \frac{2P_q}{\sqrt{L}} = P_L \Rightarrow 2P_q = \sqrt{L}\,P_L$$

$$\Rightarrow \sqrt{L} = \frac{2P_q}{P_L}$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{2P_q}{P_L}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{4P_q^2}{P_L^2}}$$ ـــــــــ وهي دالة الطلب على عنصر العمل L.

2/ خصائص المنحنى المحصل عليه: $L = \frac{4P_q^2}{P_L^2} \Rightarrow L = f(P_L)$

$$L' = \frac{\delta L}{\delta P_L} = \frac{0 - 4P^2 \cdot 2P_L}{(P_L)^4} = \frac{-8P^2}{P_L^3} < 0$$

إذن هذه الدالة هي دالة متناقصة

$$L'' = \frac{\delta^2 L}{\delta P_L} = -\frac{-8p^2 \times 3P_L^2}{P_L^6} = \frac{24p^2}{P_L^4} > 0$$

إذن الدالة محدبة باتجاه نقطة الأصل.

2/ حساب قيمة الربح وحجم الإنتاج لما: $P_K = 2,\ P_L = 1,\ P_q = 2$

$$P = P_q \cdot q - CT$$

$$L = \frac{4p^2}{P_L^2} = \frac{4(2)^2}{1^2} = \boxed{16}$$

لدينا $K = 4$

$$q = 2\sqrt{16}\,\sqrt{4} = \boxed{16}$$

$$CT = 1 \times 16 + 2 \times 4 = \boxed{24}$$

$$P = 2 \cdot 16 - 24 = 32 - 24$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 8}$$

وهو أقصى ربح يمكن الحصول عليه في الظروف السابقة.

3/ إيجاد معادلة مسار التوسع بالتخلي عن فرضية ثبات رأس المال:

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

لدينا $q = 2\sqrt{L} \cdot \sqrt{K}$

$$Pmg_L = \frac{\delta q}{\delta L} = \cancel{2}\sqrt{K} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{L}} = \boxed{\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}}$$

$$Pmg_K = \frac{\delta q}{\delta K} = \cancel{2}\sqrt{L} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{K}} = \boxed{\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}}$$

ولدينا: $P_K = 2,\ P_L = 1$.

إذن:

$$\frac{Pmg}{Pmg_K} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}}{\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \times \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2K = L \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}L}$$

وهي معادلة مسار توسع هذه المؤسسة.

- دالة التكلفة -

تكاليف الانتاج قد تكون ثابتة أو متغيرة، وهذا مرتبط بالفترة الزمنية التي تتم فيها دراسة التكاليف (قصيرة أو طويلة):

* في الفترة القصيرة نميز بين عناصر إنتاج متغيرة وأخرى ثابتة وعليه توجد تكاليف متغيرة وأخرى ثابتة

* في الفترة الطويلة: كل عناصر الانتاج تصبح متغيرة وعليه كل التكاليف متغيرة.

1/ دالة التكلفة في الفترة القصيرة:

كيفية استخراج دالة التكلفة بدلالة الكمية المنتجة q:

دالة التكلفة: هي العلاقة التي تربط بين حجم التكاليف وحجم الانتاج المحقق عن طريق انفاق هذه التكاليف، ويمكن كتابتها على الشكل:

$CT = f(q) + CF$

ولاستخراج دالة التكاليف بدلالة حجم الانتاج نستعين بثلاث معادلات تعرفنا عليها سابقا:

① دالة الانتاج: $q = f(L, K)$

② دالة التكلفة بدلالة عناصر الانتاج: $CT = LP_L + KP_K + CF$

③ دالة مسار توسع المؤسسة: $K = f(L)$

مثال: لدينا:

دالة الانتاج: $q = 4K^{\frac{2}{3}} . L^{\frac{1}{3}}$

أسعار عوامل الانتاج: $P_K = 2 , P_L = 3$

معادلة مسار التوسع للمؤسسة: $K = 3L$

المطلوب: ايجاد دالة التكلفة الكلية بدلالة الكمية المنتجة.

الحل: لدينا ثلاث معادلات:

① $q = 4K^{\frac{2}{3}} . L^{\frac{1}{3}}$

② $CT = 3L + 2K + \overset{0}{\cancel{CF}}$

③ $K = 3L$

نعوض المعادلة ③ في كل من ① و② فنجد:

① $q = 4(3L)^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 8,32\,L \rightarrow q = 8,32L \Rightarrow \boxed{L = \frac{q}{8,32}}$ ④

② $CT = 3L + 2(3L) \Rightarrow \boxed{CT = 9L}$ ⑤

بتعويض ④ في ⑤ نجد : $CT = 9\left(\frac{q}{8,32}\right)$

إذن : $1,08q$: $\boxed{CT = \frac{9q}{\cancel{1,08}}}$

وهي دالة التكلفة الكلية بدلالة الكمية المنتجة q

ه/ أنواع التكاليف : في الفترة القصيرة نميز بين تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة وعليه يمكننا كتابة دالة التكلفة الكلية التي رأيناها سابقا على الشكل :

$$\underbrace{CT}_{\text{كلية}} = \underbrace{CV}_{\text{متغيرة}} + \underbrace{CF}_{\text{ثابتة}}$$

ونميز أيضا بين التكاليف المتوسطة والتكاليف الحدية :

CM Cm

التكلفة المتوسطة : حيث تعبر التكاليف المتوسطة عن متوسط كلفة كل وحدة منتجة ، ويمكن حسابها كمايلي :

$$\underbrace{CM}_{\text{التكلفة المتوسطة}} = \frac{\overbrace{CT}^{\text{التكلفة الكلية}}}{\underbrace{q}_{\text{عدد الوحدات المنتجة}}}$$

ويمكن التمييز بين التكاليف المتوسطة المتغيرة (CVM) و التكاليف المتوسطة الثابتة (CFM)

بحيث $\boxed{CVM = \frac{CV}{q}}$ و $\boxed{CFM = \frac{CF}{q}}$

$$\boxed{CTM = CVM + CFM}$$

التكلفة الحدية : تعبر التكلفة الحدية عن تكلفة آخر وحدة منتجة ويمكن حسابها كمايلي : $Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta q}$ في حالة بيانات منفصلة (جدول)

و

$Cm = \frac{\delta CT}{\delta q}$ في حالة بيانات متصلة (دالة) (مشتق دالة التكلفة الكلية بالنسبة للكمية المنتجة)

العلاقة بين الإنتاج الحدي والتكلفة الحدية:

التكلفة الحدية ← $\boxed{C_m = \frac{P_L}{Pmg_L}}$ → الإنتاج الحدي

العلاقة بين التكلفة المتغيرة المتوسطة والإنتاج المتوسط:

التكلفة المتغيرة المتوسطة ← $\boxed{CVM = \frac{P_L}{PM_L}}$ → الإنتاج المتوسط

ملاحظة:
بما أننا نتكلم عن الفترة القصيرة فإن دوال التكلفة في هذه الفترة تخضع لقانون تناقص الغلة ويبدأ مفعول هذا القانون بالنسبة لدوال التكلفة عندما تبلغ التكلفة الحدية أدنى قيمة لها.

* تعظيم الربح في المدى القصير باستخدام دالة التكلفة:

$$P = RT - CT$$

$$RT = P_q \cdot q$$

الإيراد الحدي (سعر بيع الوحدة) ← P_q ، q → الإنتاج

$\frac{\delta P}{\delta q}$ (الوحدة)

CT = دالة التكلفة الكلية

شروط تعظيم الربح: الشرط ①: المشتقة الأولى بالنسبة لـ $q = 0$ → $P_q - C_m = 0 \Rightarrow P_q = C_m$

الإيراد الحدي ، التكلفة الحدية

الشرط ②: المشتقة الثانية أقل من الصفر

مثال: لنفترض أن دالة التكلفة لمنتج ما تأخذ الشكل التالي:

$$CT = 0{,}02\,q^3 - 0{,}8\,q^2 + 16q + 10$$

ولدينا: $P_q = 8$

المطلوب: تحديد حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أعظم ربح.

الحل: لدينا: $P = (P_q \cdot q) - CT$

بتعويض المعطيات السابقة نجد:

$$P = 8q - (0{,}02q^3 - 0{,}8q^2 + 16q + 10)$$

الشرط 1: $P_q - C_m = 0$

لدينا $P_q = 8$

$$C_m = \frac{\delta CT}{\delta q} = 0{,}06q^2 - 1{,}6q + 16$$

إذن الشرط الأول يكتب كمايلي:

$$P_q - C_m = 8 - (0{,}06q^2 - 1{,}6q + 16) = 0$$

$$P_q - C_m = 8 - 0{,}06q^2 + 1{,}6q - 16 = 0$$

$$P_q - C_m = -0{,}06q^2 + 1{,}6q - 8 = 0$$

$$\Delta = (1{,}6)^2 - 4(-0{,}06)(-8) = 0{,}64$$

$$\sqrt{\Delta} = 0{,}8$$

$q_1 = 6{,}66$ ، $q_2 = 20$

يمكن اقصاء أحد الحلين بتطبيق الشرط الثاني:

المشتقة الثانية أقل من الصفر

$$\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' = (-0{,}06q^2 + 1{,}6q - 8)' = -0{,}12q + 1{,}6$$

نعوض ب $q = 6{,}66$ في المشتقة الثانية نجد:

$$-0{,}12(6{,}66) + 1{,}6 = 0{,}8 > 0$$

إذن $q = 6{,}66$ حل مرفوض.

نعوض ب $q = 20$ فنجد: $-0{,}12(20) + 1{,}6 = -0{,}8 < 0$

ومنه $q = 20$ حل مقبول وعليه $q = 20$ هو حجم الإنتاج الذي يمكننا من تحقيق أعظم ربح.

حساب قيمة الربح: $P = RT - CT$

$$RT = P_q \cdot q = 8 \times 20 = 160$$

$$CT = 0{,}02(20)^3 - 0{,}8(20)^2 + 16(20) + 10 = 170$$

$P = 160 - 170 = -10$ خسارة وهو أقل خسارة يمكن تحقيقها

3- أ- عتبة الغلق :

نلاحظ من خلال التمرين السابق أن قيمة التكلفة الثابتة هي 10

$CF = 10$

حيث أن الدالة معطاة بالشكل:

$$CT = 0{,}02q^3 - 0{,}8q^2 + 16q + \boxed{10}$$

CF

ولاحظنا أن قيمة الخسارة قدرت بـ -10 أي $\boxed{P = -CF}$

عند هذه النقطة تحقق المؤسسة أقل خسارة ممكنة وفي هذه الحالة نقول أن المؤسسة تمكنت من تغطية كافة التكاليف المتغيرة ولم تغطي التكاليف الثابتة وبالتالي يمكنها الاستمرار في النشاط ولكن إذا تجاوزت الخسارة التكاليف الثابتة لابد على المؤسسة غلق النشاط مباشرة ولهذا سميت النقطة $\boxed{P = -CF}$ بعتبة الغلق ويمكن للمؤسسة أيضا بلوغ عتبة الغلق عندما تكون:

$$\boxed{P_q = CVM}$$

سعر بيع الوحدة المنتجة

متوسط التكاليف المتغيرة.

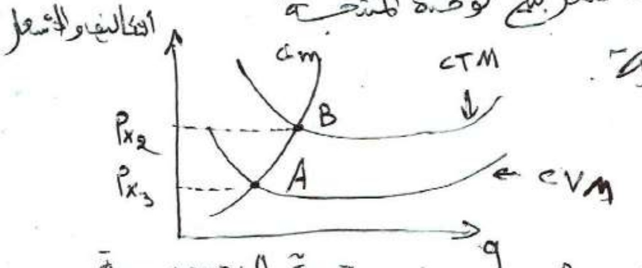
ب- عتبة المردودية: عندما يصبح الربح مساويا للصفر $P=0$ نكون أمام عتبة المردودية وهي النقطة التي تبدأ بعدها المؤسسة تحقيق الأرباح ونصل أيضا إلى عتبة المردودية في حالة

$$\boxed{P_q = CTM}$$

سعر بيع الوحدة المنتجة

متوسط التكلفة الكلية

التمثيل البياني لعتبة الغلق وعتبة المردودية



A هي عتبة الغلق ، B هي عتبة المردودية

ع- دالة التكلفة في الفترة الطويلة: في الفترة الطويلة كل التكاليف متغيرة ولا توجد تكاليف ثابتة.

$$CT_{LT} = f(q)$$

دالة التكلفة الكلية في الفترة الطويلة

ملاحظة:

تخضع دالة التكلفة في الفترة الطويلة لقانون غلة الحجم

- نرمز للتكلفة المتوسطة في المدى الطويل بـ CTM_{LT}

$$CTM_{LT} = \frac{CT_{LT}}{q}$$

- نرمز للتكلفة الحدية في المدى الطويل بـ Cm_{LT}

$$Cm_{LT} = \frac{\delta CT_{LT}}{\delta q}$$

- تعظيم الربح في المدى الطويل نفس الشروط السابقة.

1

- تمارين دالة التكلفة -

حل التمرين رقم (12) : $q = 4K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$

$P_K = 2 , P_L = 3 .$

(1) حساب الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافق لحجم الإنتاج: $q = 100$

$$Min : CT = 3L + 2K$$
$$S/c : 100 = 4K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$$

$$\mathcal{L} = 3L + 2K + \lambda\left(100 - 4K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}\right)$$

الشرط اللازم: المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لـ: $\lambda , K , L = 0$.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta L} = 3 - 4K^{\frac{2}{3}} \lambda \frac{1}{3} L^{\frac{1}{3}-1} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K} = 2 - 4L^{\frac{1}{3}} \lambda \frac{2}{3} K^{\frac{2}{3}-1} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\lambda} = 100 - 4K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \text{--- (3)}$$

من (1) نجد : $3 = \frac{4}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}\lambda \Leftarrow 3 - \frac{4}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}\lambda = 0$

من (2) نجد: $2 = \frac{8}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\lambda \Leftarrow 2 - \frac{8}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\lambda = 0$

نجد : $\frac{(1)}{(2)}$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{4}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}\cancel{\lambda}}{\frac{8}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\cancel{\lambda}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{4}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} \times \frac{3}{8}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{24}K^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}KL^{-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\frac{K}{L} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{K}{2L}$$

$$\Rightarrow 6L = 2K \Rightarrow \boxed{K = 3L} \quad \text{--- (4)}$$

نعوض (4) في (3) نتحصل :

$100 - 4(3L)^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 0$

$100 - 8{,}32\, L^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 100 - 8{,}32L = 0$

$$100 = 8,32L$$

$$\boxed{L = 12,02}$$

لدينا $K = 3L \Leftarrow K = 12,02 \times 3$

$$\boxed{K = 36,06}$$

الشرط الثاني: المحدد الهيسي أقل من الصفر (باعتبار الشرط الثاني محققا) فإن التوليفة $(L = 12,02 ,\ K = 36,06)$ هي التوليفة التي تحقق أدنى نفقة (تكلفة) والمقدرة بـ:

$$CT = 3(12,02) + 2(36,06)$$

$$CT = 36,06 + 72,12$$

$$\boxed{CT = 108,18}$$

← وهو الحد الأدنى للنفقة الكلية الموافق لحجم الإنتاج: $Q = 100$

2- إيجاد دوال النفقة الكلية بدلالة حجم الإنتاج:

أ- دالة النفقة الكلية بدلالة حجم الإنتاج: نستعين بثلاث دوال

① $q = 4K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$

② $CT = 3L + 2K$

③ $K = f(L) \Rightarrow K = 3L$

← معادلة مسار التوسع نعينها من التعريف بالقانون $\dfrac{Pmg_L}{Pmg_K} = \dfrac{P_L}{P_K}$

$$Pmg_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 4K^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} L^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3} K^{\frac{2}{3}} L^{-\frac{2}{3}}$$

$$Pmg_K = \frac{\partial q}{\partial K} = 4L^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} K^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3} L^{\frac{1}{3}} K^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} K^{\frac{2}{3}} L^{-\frac{2}{3}}}{\frac{8}{3} L^{\frac{1}{3}} K^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$$

كما وضحنا الطريقة سابقا: نجد: $\boxed{K = 3L}$

إذن دائما معادلة مسار التوسع هي المعادلة ③ من دالة K بدلالة L.

لدينا $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9} = \frac{25}{9}$

نعوض (3) في (1) و(2) فنجد:

(1) $q = 4(3L)^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}} = 4 \times 3^{\frac{2}{3}} L^{\frac{2}{3}} \times L^{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{25}{9} \times L \Rightarrow q = \frac{100}{9} L$

$\Rightarrow L = \frac{q}{\frac{100}{9}} \Rightarrow L = q \times \frac{9}{100} \Rightarrow \boxed{L = \frac{9q}{100}}$ ...(4)

(2) $CT = 3L + 2(3L) = 9L$ ....(5)

نعوض (4) في (5) فنجد:

$CT = 9 \times \frac{9q}{100} \Rightarrow \boxed{CT = \frac{81}{100} q}$

ب- حساب التكلفة المتوسطة:

$CM = \frac{CT}{q} \Rightarrow CM = \frac{\frac{81}{100}\cancel{q}}{\cancel{q}}$

$\Rightarrow \boxed{CM = \frac{81}{100}}$

ج- حساب التكلفة الحدية:

$C_m = \frac{\delta CT}{\delta q} \Rightarrow \boxed{C_m = \frac{81}{100}}$

حل التمرين رقم (13) : $q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$

$P_K = 80 \quad , \quad P_L = 40$

1- حساب قيمة التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج 2000 وحدة من السلعة q

$$Min : CT = 40L + 80K$$

$$S/c : 2000 = 2K^2 - 4KL + 5L^2$$

$$L = 40L + 80K + \lambda\,(2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2)$$

الشرط اللازم : المشتقات الجزئية =0 :

$$\frac{\delta L}{\delta L} = 40 + 4K\lambda - 10L\lambda = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta K} = 80 - 4K\lambda + 4L\lambda = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2 = 0 \quad \dots (3)$$

من (1) نجد :
$$40 + (4K - 10L)\lambda = 0$$
$$\Rightarrow 40 = (4K - 10L)\lambda$$

من (2) نجد :
$$80 + (4L - 4K)\lambda = 0$$
$$\Rightarrow 80 = (4L - 4K)\lambda$$

نجد : $\frac{(1)}{(2)}$
$$\frac{40}{80} = \frac{(4K - 10L)\cancel{\lambda}}{(4L - 4K)\cancel{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4K - 10L}{4L - 4K}$$

$$\Rightarrow 4L - 4K = 2(4K - 10L)$$

$$\Rightarrow 4L + 20L = 8K + 4K$$

$$24L = 12K$$

$$K = \frac{24}{12}L \Rightarrow \boxed{K = 2L} \quad (4)$$

4

5

نعوض (4) في (3) فنجد:

$$2000 - 2(2L)^2 + 4(2L)L - 5L^2 = 0$$

$$2000 - \cancel{8L^2} + \cancel{8L^2} - 5L^2 = 0.$$

$$2000 - 5L^2 = 0 \Rightarrow 2000 = 5L^2 \Rightarrow L^2 = \frac{2000}{5}$$

$$L^2 = 400$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{400}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 20}$$

لدينا $K = 2L$

إذن $\boxed{K = 40}$

باعتبار الشرط الثاني (المحدد الهيسي أقل من الصفر) محققا فإن التوليفة $(L=20, K=40)$ هي التوليفة التوازنية التي تحقق للمنتج أدنى تكلفة كلية قدرها:

$$CT = 40(20) + 80(40) = 800 + 3200 = \boxed{4000}$$

وحدة نقدية

2/ حساب حجم الانتاج المحقق بميزانية قدرها: $CT = 6000$

$$Max: q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$$

$$S/c: 6000 = 40L + 80K$$

باستخدام طريقة مضروب لاغرانج:

$$L = 2K^2 - 4KL + 5L^2 + \lambda(6000 - 40L - 80K)$$

الشرط اللازم: المشتقات الجزئية الأولى = 0:

$$\frac{\delta L}{\delta L} = -4K + 10L - 40\lambda = 0 \ldots (1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta K} = 4K - 4L - 80\lambda = 0 \ldots (2)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 6000 - 40L - 80K = 0 \ldots (3)$$

من (1) نجد: $-4K + 10L = 40\lambda$

من (2) نجد: $4K - 4L = 80\lambda$

حل التمرين رقم 13 : $q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$

$P_K = 80 \quad , \quad P_L = 40$

1- حساب قيمة التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج 2000 وحدة من السلعة q

$$Min\ CT = 40L + 80K$$

$$S/c : 2000 = 2K^2 - 4KL + 5L^2$$

$$\mathcal{L} = 40L + 80K + \lambda\left(2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2\right)$$

الشرط اللازم : المشتقات الجزئية =0 :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta L} = 40 + 4K\lambda - 10L\lambda = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K} = 80 - 4K\lambda + 4L\lambda = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = 2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2 = 0 \quad \ldots (3)$$

من (1) نجد : $40 + (4K - 10L)\lambda = 0$

$$\Rightarrow 40 = (4K - 10L)\lambda$$

من (2) نجد : $80 + (4L - 4K)\lambda = 0$

$$\Rightarrow 80 = (4L - 4K)\lambda$$

نجد : $\frac{(1)}{(2)}$

$$\frac{40}{80} = \frac{(4K - 10L)\lambda}{(4L - 4K)\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4K - 10L}{4L - 4K}$$

$$\Rightarrow 4L - 4K = 2(4K - 10L)$$

$$\Rightarrow 4L + 20L = 8K + 4K$$

$$24L = 12K$$

$$K = \frac{24}{12}L \Rightarrow \boxed{K = 2L} \quad (4)$$

6

$$\frac{-4K+10L}{4K-4L} = \frac{40K}{80K}$$ نجد : $\frac{①}{②}$

$$\Leftarrow \frac{-4K+10L}{4K-4L} = \frac{1}{2}$$

$$4K - 4L = -8K + 20L$$

$$4K + 8K = 20L + 4L$$

$$12K = 24L$$

$$K = \frac{24}{12}L \Rightarrow \boxed{K = 2L} \quad --④$$

وهو نفسها معادلة مسار التوسع

نعوض ④ في ③ فنجد:

$$6000 - 40L - 80(2L) = 0 \Rightarrow 6000 - 40L - 160L = 0$$

$$6000 - 200L = 0$$

$$\Rightarrow 6000 = 200L$$

$$\Rightarrow L = \frac{6000}{200}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 30}$$

ولدينا : $K = 2L \Rightarrow \boxed{K = 60}$

بافتراض الشرط الثاني محققا (المحدد الهيسي أكبر من الصفر) فإن التوليفة $(L=30, K=60)$ هي التوليفة التوازنية التي تحقق أكبر الناتج عندما $CT=6000$ ونقدر هذا الإنتاج بـ :

$$q = 2(60)^2 - 4(60)(30) + 5(30)^2$$

$$q = 7200 - 7200 + 4500$$

$$\boxed{q = 4500}$$

3/ ايجاد دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية بدلالة الكمية المنتجة q

أ- ايجاد دالة التكلفة الكلية: لإيجاد دالة التكلفة الكلية نستعين بـ 3 معادلات:

① $q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$

② $CT = 40L + 80K$

③ $K = 2L$ ← معادلة مسار التوسع (سبق وعرفنا طريقة ايجادها)

نعوض المعادلة ③ في ① و ② :

من ① نجد :

$$q = 2(2L)^2 - 4(2L)L + 5L^2$$

$$\Rightarrow q = 8L^2 - 8L^2 + 5L^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 5L^2} \Rightarrow L^2 = \frac{q}{5} \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{\frac{q}{5}}} \quad ④$$

من ② نجد :

$$CT = 40L + 80(2L)$$

$$\Rightarrow CT = 40L + 160L$$

$$\Rightarrow \boxed{CT = 200L} \quad ⑤$$

نعوض ④ في ⑤ فنجد :

عملية تنطيق نضرب × $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$CT = 200\sqrt{\frac{q}{5}}$$

$$\Rightarrow CT = 200\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{5}} \Rightarrow CT = \frac{200\sqrt{q}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow CT = \frac{200\sqrt{5q}}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{CT = 40\sqrt{5q}}$$

وهي دالة التكلفة الكلية .

ب - دالة التكلفة المتوسطة بدلالة q:

$$CM = \frac{CT}{q} \Rightarrow \boxed{CM = \frac{40\sqrt{5q}}{q}}$$

ج - دالة التكلفة الحدية بدلالة q:

$$Cm = \frac{\delta CT}{\delta q} = \left(40\sqrt{5q}\right)' = 40 \times \frac{5}{2\sqrt{5q}} = \frac{200}{2\sqrt{5q}}$$

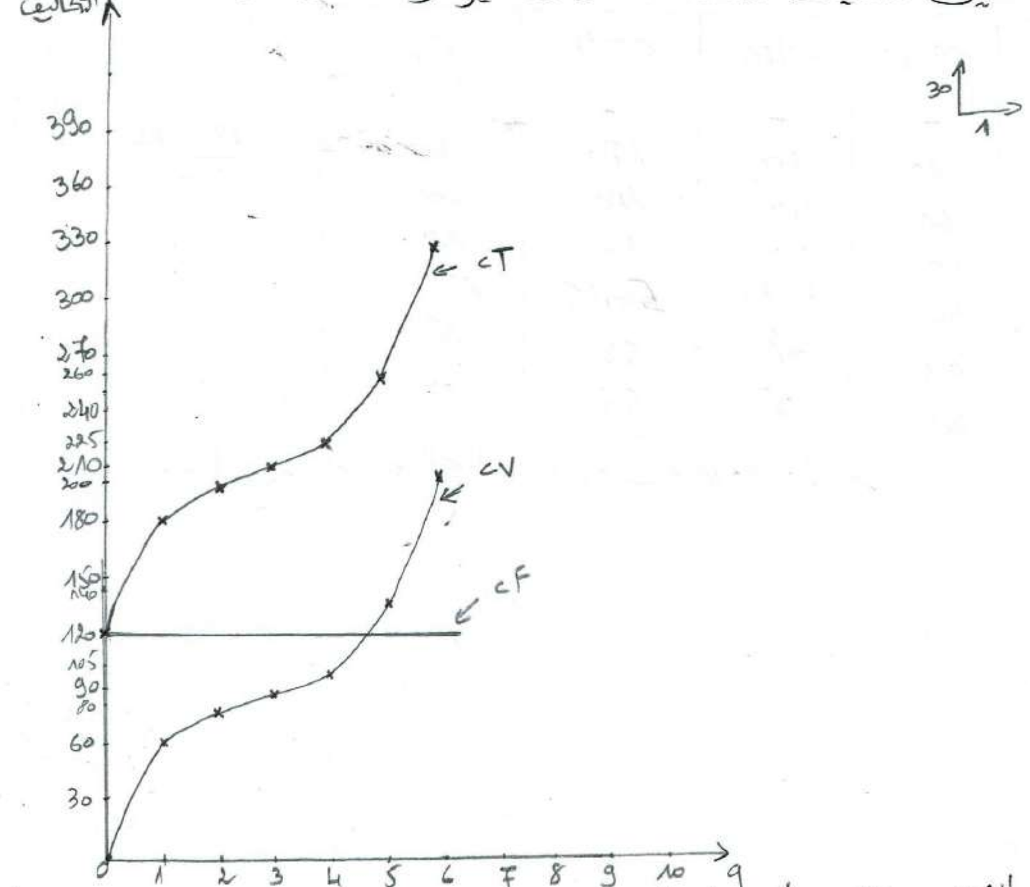
$$\boxed{Cm = \frac{100}{\sqrt{5q}}}$$

7

حل التمرين رقم (٨٦):

8

١- تمثيل منحنيات التكلفة الكلية والمتغيرة والثابتة:



٢- الشرح: شرح الأسباب التي جعلت هذه المنحنيات تأخذ هاته الأشكال:

* منحنى CF يأخذ شكل خط مستقيم لأن التكاليف الثابتة غير مرتبطة بحجم الإنتاج.

* أما التكلفة المتغيرة (CV) فتساوي الصفر ثم ترتفع كلما زاد الإنتاج، وتزداد CV قبل أن يبدأ مفعول قانون تناقص الغلة في العمل بمعدل متناقص حيث يكون المنحنى مقعرًا إلى الأسفل ثم بمعدل متزايد بعد أن يبدأ مفعول قانون تناقص الغلة فيصبح شكل المنحنى مقعرًا إلى الأعلى.

* ولأن CT (التكلفة الكلية) تساوي CF + CV فإن منحنى CT يأخذ نفس شكل CV فقط ويرتفع عن هذا الأخير بالمقدار: CF = 120.

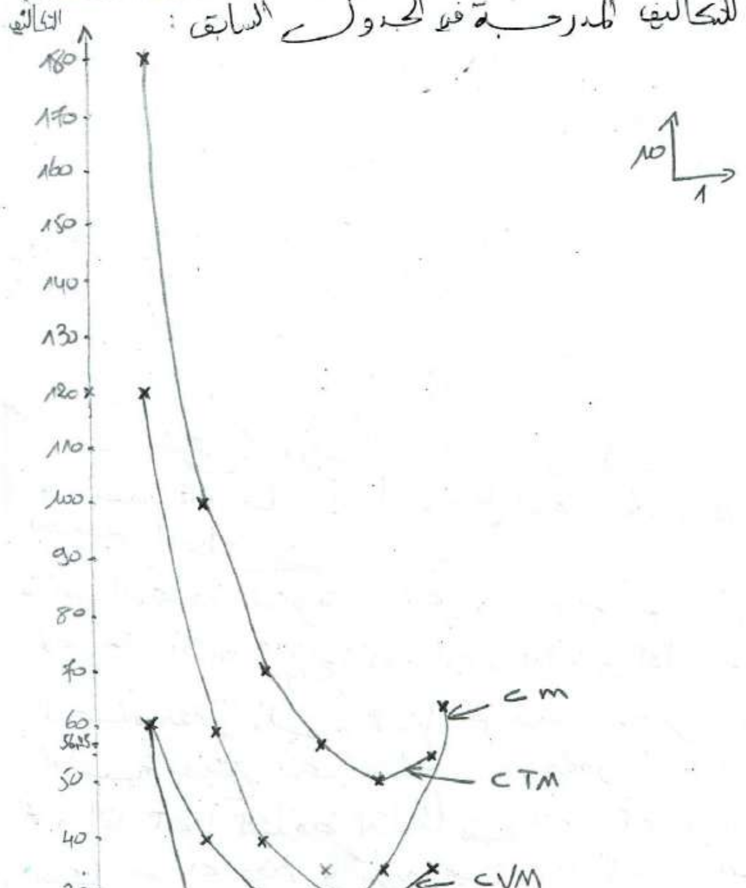
3/ ايجاد كل من متوسط التكلفة الثابتة، متوسط التكلفة المتغيرة ومتوسط التكلفة الكلية و التكلفة الحدية.

q	CFM	CVM	CTM	Cm
0	-	-	-	-
1	120	60	180	60
2	60	40	100	20
3	40	30	70	10
4	30	26,25	56,25	15
5	24	28	52	35
6	20	35	55	70

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta q}$$

$$\frac{180-120}{1-0}$$

التمثيل البياني للتكاليف المدرجة في الجدول السابق :



9

حل التمرين رقم (15):

النقاط المكونة لمسار التوسع المحصل عليه في السؤال الأخير من التمرين رقم (9) هي:

$B: (L=3 ; K=4)$ $\qquad$ $E: (L=2,5 ; K=3,5)$

$H: (L=2,3 ; K=2,7)$ $\qquad$ $K: (L=2 ; K=2)$

$N: (L=1,5 ; K=1,5)$ $\qquad$ $Q: (L=1 ; K=1)$

1/ حساب التكلفة الكلية والحدية المحصل عليها على طول هذا المسار:

التوليفات	Q	L	K	$CT = 2L + 2K$	$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta q}$	
B	200	3	4	14	-	
E	175	2,5	3,5	12	$\frac{2}{25}$	$\leftarrow \frac{12-14}{175-200}$
H	140	2,3	2,7	10	$\frac{2}{35}$	$\leftarrow \frac{10-12}{140-175}$
K	100	2	2	8	$\frac{1}{20}$	$\leftarrow \frac{8-10}{100-140}$
N	65	1,5	1,5	6	$\frac{2}{35}$	$\leftarrow \frac{6-8}{65-100}$
Q	35	1	1	4	$\frac{1}{15}$	$\leftarrow \frac{4-6}{35-65}$

ملاحظة: في هذه الحالة حجم الإنتاج تابع لكل من L و K ومنه دالة التكلفة هنا في الفترة الطويلة (K ليس ثابتا)

2/ حساب التكلفة الكلية لإنتاج السلعة q عندما K=2 (من جدول التمرين رقم 9).

انطلاقا من الجدول 9 التوليفات التي تمثل K=2 هي F ، I ، K

بما أن K ثابت فإن الإنتاج يصبح تابع للعمل فقط (الفترة قصيرة)

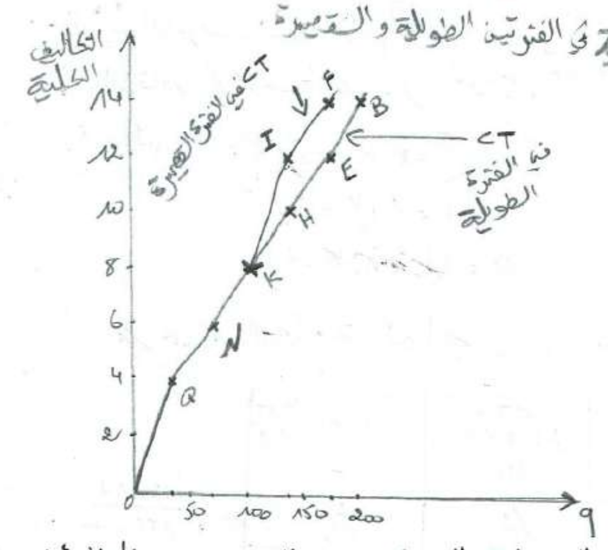
$$CT = f(q) + CF = CV + CF$$

أو $CT = K P_K + L P_L$

التوليفات	Q	L	$CF = 2 \times K$ ($P_K \times K$)	CV ($L \times P_L$)	$CT = CF + CV$
F	175	5	4	10	14
I	140	4	4	8	12
K	100	2	4	4	8

10

التمثيل البياني للتكلفة الكلية في الفترتين الطويلة والقصيرة



3/ التعليق على المنحنيين: بعد النقطة المشتركة بين المنحنيين نلاحظ أن كل التوليفات الواقعة على منحنى التكلفة الخاص بالفترة القصيرة تحمل المؤسسة مبالغ نقدية أكبر مما تحملها التوليفات الواقعة على منحنى الفترة الطويلة لتحقيق نفس الإنتاج بحيث:

$q=140$: في الفترة القصيرة $CT_I = 12$.
في الفترة الطويلة $CT_H = 10$.

$q=175$: في الفترة القصيرة $CT_F = 14$.
الفترة الطويلة $CT_E = 12$.

أما التوليفة K فهي تحقق نفس مستوى الإنتاج $q=100$ بنفس التكلفة $CT=8$ في الفترتين القصيرة والطويلة لأنها توليفة مثلى.

وعليه حتى تتساوى التكاليف في الفترة القصيرة والطويلة على المؤسسة التخلي عن فكرة ثبات K وإحلال K محل عنصر العمل L (التخفيض من التكاليف).

$$TMST_{E,F} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{2-3{,}5}{5-2{,}5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \boxed{0{,}6} \qquad q=175$$

معنى هذا يمكن إحلال 0,6 من K محل وحدة واحدة من L ويبقى محافظا على نفس مستوى الإنتاج.

$$TMST_{H,I} = \frac{-2-2{,}7}{4-2{,}3} = \frac{0{,}7}{1{,}7} = \boxed{0{,}41} \qquad q=140$$

معنى هذا 0,41 من K تعوض وحدة واحدة من L.

حل التمرين رقم (16) :

لدينا دوال التكلفة الكلية للمؤسسات A ، B ، C ، D

A) $CT_A = 200 + 10q$

B) $CT_B = 500 + 8q - \frac{1}{2}q^2$

C) $CT_C = 300 + 6q + \frac{1}{2}q^2$

D) $CT_D = 20q - 4q^2 + \frac{1}{3}q^3$

1/ كتابة معادلات متوسط التكاليف الثابتة CFM ، والمتغيرة CVM والتكلفة المتوسطة CM ، والتكلفة الحدية :

	$CFM = \frac{CF}{q}$	$CVM = \frac{CV}{q}$	$CM = \frac{CT}{q}$	$Cm = \frac{\delta CT}{\delta q}$
A	$\frac{200}{q}$	10	$\frac{200}{q} + 10$	10
B	$\frac{500}{q}$	$8 - \frac{1}{2}q$	$\frac{500}{q} + 8 - \frac{1}{2}q$	$8 - q$
C	$\frac{300}{q}$	$6 - \frac{1}{2}q$	$\frac{300}{q} + 6 + \frac{1}{2}q$	$6 + q$
D	0	$20 - 4q + \frac{1}{3}q^2$	$20 - 4q + \frac{1}{3}q^2$	$20 - 8q + q^2$

2/ تحديد نوعية غلة الحجم باستخدام مرونة التكاليف :

$$e_{c/q} = \underbrace{\frac{\delta CT}{\delta Q}}_{Cm} \cdot \underbrace{\frac{Q}{CT}}_{\frac{1}{CM}}$$

$$e_{c/q} = Cm \cdot \frac{1}{CM} \Rightarrow \boxed{e_{c/q} = \frac{Cm}{CM}}$$

$e_{c/q} = 1$: غلة حجم ثابتة معنى هذا إذا تغير q بـ 1% تتغير التكاليف بنفس النسبة إذا غلة حجم ثابتة .

$e_{c/q} > 1$ معنى هذا زيادة الإنتاج بـ 1% تؤدي إلى زيادة التكاليف بأكبر من 1% إذن غلة حجم متناقصة .

$e_{c/q} < 1$ معنى هذا زيادة الإنتاج بـ 1% تستلزم زيادة التكاليف بأقل من 1% إذن غلة حجم متزايدة .

13

بالنسبة لهذا التمرين:

للمؤسسة A:

$$e_{c/q_A} = \frac{Cm_A}{CM_A} = \frac{10}{10} = 1$$

إذن غلة حجم ثابتة.

المؤسسة B:

$$e_{c/q_B} = \frac{Cm_B}{CM_B} = \frac{8-q}{8-\frac{1}{2}q} < 1$$

إذن غلة حجم متزايدة.

للمؤسسة C:

$$e_{c/q_C} = \frac{Cm_C}{CM_C} = \frac{6+q}{6+\frac{1}{2}q} > 1$$

إذن غلة حجم متناقصة.

للمؤسسة D:

$$e_{c/q_D} = \frac{Cm_D}{CM_D} = \frac{20-8q+q^2}{20-4q+\frac{1}{3}q^2}$$

ندرس حالة غلة الحجم الثابتة أي $e_{c/q}=1$ ومنه نضع: $\cancel{20}-8q+q^2 = \cancel{20}-4q+\frac{1}{3}q^2$

$$-4q+\frac{2}{3}q^2 = 0 \Rightarrow q\left(-4+\frac{2}{3}q\right)=0$$

إما: $\boxed{q=0}$ أو $-4+\frac{2}{3}q=0 \Leftarrow \boxed{q=6}$

إذن يوجد: $q=6$ ، $q=0$.

ندرس الإشارة:

$q(-4+\frac{2}{3}q)$		0		6	
q	−	0	+		+
$-4+\frac{2}{3}q$	−		−	0	+
$q(-4+\frac{2}{3}q)$	+		−		+

من هنا: إذا كانت $q=6$ و $q=0$ غلة الحجم ثابتة

إذا كانت $q>6$ غلة الحجم متناقصة

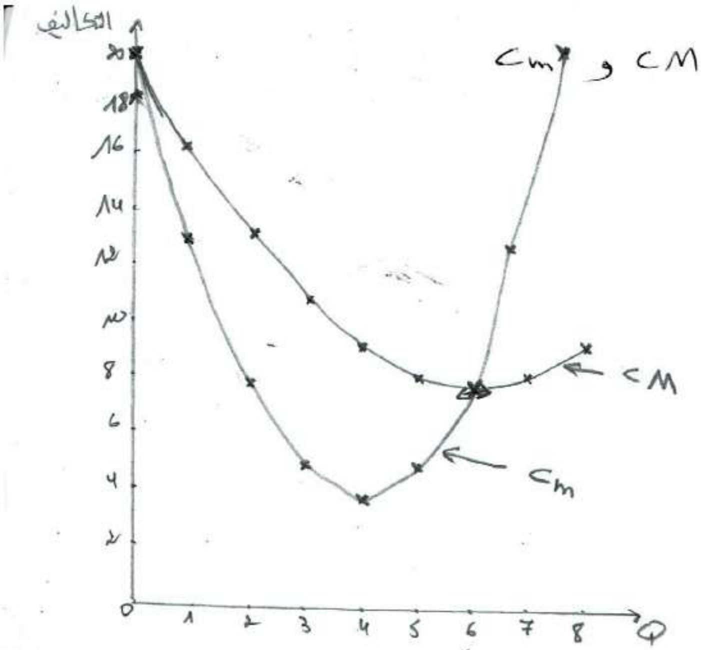
إذا كانت $q>0$ و $q<6$ غلة الحجم متزايدة

3/ حساب التكلفة المتوسطة والحدية للمؤسسة D:

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8
CT	0	16,33	26,67	33	37,33	41,67	48	58,33	74,67
CM	20	16,33	13,33	11	9,33	8,33	8	8,33	9,33
Cm	20	13	8	5	4	5	8	13	20

يتم ملأ الجدول بالتعويض في الدوال CT_D Cm_D CM_D

التمثيل البياني لـ : CM و Cm



4/ تحديد أين يبدأ كل من الإنتاج الحدي والمتوسط في التناقص بالنسبة للمؤسسة D بدلالة q :

نعلم أن : $CM = \frac{P_L}{PM_L}$, $Cm = \frac{P_L}{Pmg_L}$

بما أن منحنى الإنتاج الحدي هو مقلوب منحنى التكلفة الحدية Cm ومنحنى الناتج المتوسط هو مقلوب منحنى التكلفة المتوسطة CM فإنه :

- يبدأ الانتاج الحدي في التناقص عندما تبدأ Cm في التزايد أي عند : $q = 4$

- يبدأ الانتاج المتوسط في التناقص عندما تبدأ CM في التزايد أي عندما : $q = 6$

14

(15)

حل التمرين رقم 17 :

لدينا دالة التكلفة التالية : $C = 0{,}02q^3 - 0{,}6q^2 + 7{,}5q + 20$

$P_q = 5$

حساب حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح ممكن :

طبيعة المشكلة : تعظيم الربح

$P = RT - CT$

$RT = P_q \, q = 5q$

$CT = 0{,}02q^3 - 0{,}6q^2 + 7{,}5q + 20$

$\Rightarrow P = 5q - 0{,}02q^3 + 0{,}6q^2 - 7{,}5q - 20$

$\Rightarrow P = -0{,}02q^3 + 0{,}6q^2 - 2{,}5q - 20$

الشرط اللازم : $\frac{\delta P}{\delta q} = 0$

$\frac{\delta P}{\delta q} = -0{,}06q^2 + 1{,}2q - 2{,}5 = 0$

$\Delta = (1{,}2)^2 - 4(-0{,}06)(-2{,}5)$

$\Delta = 1{,}44 - 0{,}6 = 0{,}84$

$\sqrt{\Delta} = 0{,}92$

$q_1 = \frac{-1{,}2 - 0{,}92}{2(-0{,}06)} = \frac{-2{,}12}{-0{,}12} = 17{,}66$

$q_2 = \frac{-1{,}2 + 0{,}92}{-0{,}12} = \frac{-0{,}28}{-0{,}12} = 2{,}33$

يمكن إقصاء أحد الحلين من خلال الشرط الكافي

الشرط الكافي : المشتقة الثانية أقل من الصفر $\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)''$

$\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' = -0{,}12q + 1{,}2$

نعوض بـ $q = 17{,}66$ في المشتقة الثانية :

$-0{,}12(17{,}66) + 1{,}2 = \boxed{0{,}92}$ مقبول

نعوض بـ $q = 2{,}33$ في المشتقة الثانية

$-0{,}12(2{,}33) + 1{,}2 = \boxed{0{,}92}$ مرفوض

إذن حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح هو : $\boxed{q = 17{,}66}$

ومقدار الربح هو :

(16)

$P = -0{,}02\,q^3 + 0{,}6\,q^2 - 2{,}5q - 20$

$P = -0{,}02(17{,}66)^3 + 0{,}6(17{,}66)^2 - 2{,}5(17{,}66) - 20$

$P = -0{,}02(5507{,}72) + 0{,}6(311{,}87) - 2{,}5(17{,}66) - 20$

$P = -110{,}15 + 187{,}122 - 44{,}15 - 20$

$P = -174{,}3 + 187{,}122$

$\boxed{P = 12{,}822}$

حل التمرين رقم (18) :

لدينا دالة التكلفة التالية: $q = 0{,}02\,q^3 - 0{,}8\,q^2 + 16q + 10$

$P_q = 8$

ايجاد حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح ممكن:

طبيعة المشكلة: تعظيم الربح.

$P = RT - CT$

$RT = 8q$

$CT = 0{,}02q^3 - 0{,}8q^2 + 16q + 10$

$P = 8q - 0{,}02q^3 + 0{,}8q^2 - 16q - 10$

$P = -0{,}02q^3 + 0{,}8q^2 - 8q - 10$

الشرط اللازم: $\frac{\delta P}{\delta q} = 0$

$\frac{\delta P}{\delta q} = -0{,}06\,q^2 + 1{,}6q - 8 = 0$

$\Delta = (+1{,}6)^2 - 4(-0{,}06)(-8)$

$\Delta = 2{,}56 - 1{,}92 = 0{,}64$

$\sqrt{\Delta} = 0{,}8$ $\boxed{20}$

$q_1 = \frac{-1{,}6 - 0{,}8}{2(-0{,}06)} = \frac{-2{,}4}{-0{,}12} =$

$q_2 = \frac{-1{,}6 + 0{,}8}{-0{,}12} = \frac{-0{,}8}{-0{,}12} = \boxed{+6{,}66}$

يمكن إقصاء أحد الحلين من خلال الشرط الكافي لتعظيم الربح.

الشرط الكافي: $\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' < 0$

(17)

$$\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' = -0.12q + 1.6$$

نعوض بـ $q = 20$ في المشتقة الثانية:

$-0.12(20) + 1.6 = -0.8 < 0$ مقبول

نعوض بـ $q = 6.66$ في المشتقة الثانية:

$-0.12(6.66) + 1.6 = 0.8 > 0$ مرفوض

ومنه حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق به المنتج أقصى ربح ممكن هو: $\boxed{q = 20}$

وعليه مقدار الربح هو:

$$P = -0.02(20)^3 + 0.8(20)^2 - 8(20) - 10$$

$$P = (-0.02 \times 8000) + (0.8 \times 400) - (8 \times 20) - 10$$

$$P = -160 + 320 - 160 - 10$$

$$P = -10$$

وهي أقل خسارة يمكن أن تتحملها المؤسسة

نلاحظ أن: $P = -CF$ بحيث $CF = 10$

وعليه تعتبر هذه النقطة عتبة الغلق حيث أن المؤسسة تمكنت من تغطية التكاليف المتغيرة ولم تتمكن من تغطية التكاليف الثابتة وبالتالي يمكن للمنتج الاستمرار في النشاط ولكن إذا تجاوزت الخسارة قيمة الأرباح الثابتة يجب عليه غلق النشاط مباشرة.

حل التمرين رقم (19):

لدينا دالة التكلفة التالية:

$$CT = 40 + 30q - 10q^2 + q^3$$

$$P_q = 5$$

التحقق من نتيجة المؤسسة ربح أم خسارة:

يجب حساب الربح ولكن قبل ذلك لابد من تحديد حجم الإنتاج الأمثل

12

طبيعة المشكلة: تعظيم الربح:

$P = RT - CT$

$RT = 5q$

$CT = 40 + 30q - 10q^2 + q^3$

$P = 5q - 40 - 30q + 10q^2 - q^3$

$P = -q^3 + 10q^2 - 25q - 40$

الشرط اللازم: $\frac{\delta P}{\delta q} = 0$

$\frac{\delta P}{\delta q} = -3q^2 + 20q - 25 = 0$

$\Delta = (20)^2 - 4(-3)(-25)$

$\Delta = 400 - 300 = 100$

$\sqrt{\Delta} = 10$.

$q_1 = \frac{-20 - 10}{-6} = \frac{-30}{-6} = 5$

$q_2 = \frac{-20 + 10}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{10}{6}$

يمكن إقصاء أحد الحلين من خلال الشرط الكافي.

الشرط الكافي: المشتقة الثانية أقل من الصفر: $\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' < 0$

$\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'' = -6q + 20$

نعوض بـ : $q = 5$ في المشتقة الثانية:

$-6(5) + 20 = -10 < 0$ مقبول

نعوض بـ : $q = \frac{10}{6}$ في المشتقة الثانية:

$-\cancel{6} \times \frac{10}{\cancel{6}} + 20 = 10 > 0$ مرفوض

ومنه حجم الإنتاج الأمثل الذي يمكن المنتج من تحقيق أعظم ربح هو:

$\boxed{q = 5}$

وعليه مقدار الربح المحقق هو:

$P = -(5)^3 + 10(5)^2 - 25(5) - 40$

$P = -125 + 250 - 125 - 40$

$\boxed{P = -40} \Rightarrow P = -CF$

وعليه المؤسسة حققت خسارة وهي أقل خسارة يمكن أن يتحملها المنتج

نعم من صالح المؤسسة أن تنتج عند هذا السعر
لأن مقدار الخسارة يساوي قيمة التكاليف الثابتة وعليه فإن المؤسسة
تمكنت من تغطية التكاليف المتغيرة كلها، و بما أن التكاليف الثابتة تدفعها
المؤسسة سواء أنتجت أو لم تنتج فمن مصلحة المؤسسة الاستمرار في
الإنتاج إذا إرتأت أن الخسارة المحققة هي نتيجة ظروف عابرة. وتسمى
هذه الوضعية بعتبة الغلق. حيث عند هذه النقطة $P_q = CVM$

ملاحظة

إذا كانت الخسارة المحققة أكبر من قيمة التكاليف الثابتة هنا يكون
من صالح المؤسسة أن تتوقف عن النشاط (غلق النشاط)

1

- دالة العرض -

إذا كانت دالة الطلب تعبر عن العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها وهي في الغالب علاقة عكسية، فإن دالة العرض تعبر عن العلاقة بين الكمية المعروضة وسعرها أيضا، لكنها في الغالب علاقة عكسية.

اشتقاق منحنيات العرض:

1- في الفترة القصيرة جدا: يتخذ منحنى العرض شكل خط عمودي مستقيم على محور الفواصل، وفي هذه الحالة تكون مرونة العرض بالنسبة للسوق مساوية للصفر.

المنحنى يتخذ هذا الشكل لأن المنتج لا يستطيع تغيير حجم إنتاجه خلال هذه الفترة القصيرة جدا.

2- في الفترة القصيرة: يستطيع المنتج تغيير حجم إنتاجه من خلال تغيير مستوى استخدامه لعناصر الإنتاج المتغيرة، ولكنه طبعا لا يستطيع تغيير حجم المشروع نظرا لوجود بعض عناصر الإنتاج الثابتة.

طريقة اشتقاق منحنى العرض في هذه الحالة:

مثال: $C = 5000 + 100q - 5q^2 + \frac{2}{3}q^3$

مع العلم أن هذا السوق تسوده المنافسة التامة (الكاملة)

المطلوب: استنتاج دالة العرض.

الحل: نعلم أن الشرط اللازم لتعظيم الربح هو: $C_m = P_q$

أي: $100 - 10q + 2q^2 = P_q$

نعلم أيضا أن المنتج يتوقف عن الإنتاج في الفترة القصيرة عندما يكون ~~متوسط~~ السعر P_q أقل من متوسط التكلفة المتغيرة CVM

لأن عتبة الغلق ~~هي~~ هي $P_q = CVM$

وبالتالي إذا كان P_q أقل من CVM المنتج يغلق العملية الإنتاجية ويصبح الإنتاج معدوما $q=0$

2

الحد الأدنى للسعر P_q : الحد الأدنى للسعر الذي تقبل به المؤسسة في المدى القصير هو ذلك السعر المقابل لأدنى قيمة لمتوسط التكلفة المتغيرة CVM

أدنى قيمة لـ CVM نتحصل عليها من خلال اشتقاق دالة CVM وانعدام المشتقة.

مثلا في هذا المثال:

$$CVM = \frac{CV}{q}$$

$$\Rightarrow CVM = \frac{100q - 5q^2 + \frac{2}{3}q^3}{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{CVM = 100 - 5q + \frac{2}{3}q^2}$$

الآن نحدد المشتقة الأولى لـ CVM ونعدمها:

$$CVM' = -5 + \frac{4}{3}q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}q = 5 \Rightarrow q = \frac{5}{\frac{4}{3}} = 5 \times \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{15}{4}}$$

الآن نعوض بقيمة $q = \frac{15}{4}$ في CVM:

$$CVM = 100 - 5 \times \frac{15}{4} + \frac{2}{3}\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$$\boxed{CVM = 90,625}$$

وهو أدنى سعر يمكن أن تنتج عنده المؤسسة في المدى القصير

وبالتالي يمكننا كتابة دالة العرض كالآتي:

$$P_q = 100 - 10q + 2q^2 \quad \underline{si} \quad P_q \geq 90,625$$

$$q = 0 \quad si \quad P_q < 90,625$$

وإذا عبرنا عن دالة العرض في صورة الكمية بدلالة السعر نجد:

$$100 - 10q + 2q^2 - P_q = 0 \Rightarrow 2q^2 - 10q + 100 - P_q = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(100 - P_q)$$

$$\Delta = 100 - 800 + 8P_q$$

3

$$\Delta = -700 + 8p_q$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{8p_q - 700}$$

$$q = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{10+\sqrt{8p_q-70}}{4}$$

$q = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2A}$ دائما نختار مستوى الإنتاج

إذن دالة العرض في الصورة العكسية بدلالة السعر هي:

$$q = \frac{10+\sqrt{8p_q-70}}{4} \quad si \; p_q \geq 0$$
$$q = 0 \quad si \; p_q < 0$$

حل التمرين رقم 02:

لدينا: $C = 0{,}1q^3 - 2q^2 + 15q + 10$

1. تحديد الحد الأدنى للسعر P الذي يمكن أن تنتج عنده المؤسسة في المدى القصير:

الحد الأدنى للسعر الذي تقبل به المؤسسة في المدى القصير هو ذلك السعر المقابل لأدنى قيمة لمتوسط التكلفة المتغيرة CVM.

$$CVM = \frac{CV}{q} = \frac{0{,}1q^3 - 2q^2 + 15q}{q}$$
$$\Rightarrow CVM = 0{,}1q^2 - 2q + 15$$
$$CVM' = 0{,}2q - 2$$
$$CVM' = 0 \Rightarrow 0{,}2q - 2 = 0$$
$$\Rightarrow 0{,}2q = 2 \Rightarrow q = \frac{2}{0{,}2}$$
$$\Rightarrow \boxed{q = 10}$$

نحسب قيمة CVM عند $q=10$ فنجد: $CVM = 0{,}1(10)^2 - 2(10) + 15$ $\Rightarrow \boxed{CVM = 5}$

إذن أدنى سعر تقبل به المؤسسة هو $\boxed{p_q = 5}$

④

2- استنتاج دالة العرض في صورة الكمية بدلالة السعر: $q = f(P_q)$

من الشرط اللازم لتعظيم الربح: $C_m = P_q$

$$C_m = \frac{\delta CT}{\delta q} = 0,3q^2 - 4q + 15$$

إذن:

$P_q = 0,3q^2 - 4q + 15$ si $P_q \geq 5$

$q = 0$ si $P_q < 5$

إيجاد الصورة الكمية لدالة العرض بدلالة السعر:

نضع:

$$0,3q^2 - 4q + 15 - P_q = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(0,3)(15 - P_q)$$

$$\Delta = 16 - 18 + 1,2P_q$$

$$\Delta = -2 + 1,2P_q \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1,2P_q - 2}$$

إذن:

$$q = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{4 + \sqrt{1,2P_q - 2}}{0,6}$$

ومنه دالة العرض في الصورة الكمية هي:

$q = \dfrac{4 + \sqrt{1,2P_q - 2}}{0,6}$ si $P_q \geq 5$

$q = 0$ si $P_q < 5$

حل التمرين رقم (21):

$$CT = 0,25q^3 - 4q^2 + 20q + 20$$

إيجاد دالة العرض بدلالة السعر (الصورة الكمية).

من الشرط اللازم لتعظيم الربح: $C_m = P_q$

$$C_m = 0,75q^2 - 8q + 20$$

5

$$\Rightarrow P_q = 0{,}75q^2 - 8q + 20$$

إذن:

$$0{,}75q^2 - 8q + 20 - P_q = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(0{,}75)(20 - P_q)$$

$$\Delta = 64 - 60 + 3P_q$$

$$\Delta = 4 + 3P_q$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 + 3P_q}$$

$$q = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2A} \Rightarrow \boxed{q = \frac{8 + \sqrt{4 + 3P_q}}{1{,}5}}$$

ولكن قبل وضع الشكل النهائي لدالة العرض لابد أن

نحدد الحد الأدنى للسعر P_q الذي تقبل به المؤسسة.

$$CVM = \frac{CV}{q} = \frac{0{,}25q^3 - 4q^2 + 20q}{q} = 0{,}25q^2 - 4q + 20$$

$$CVM' = 0{,}5q - 4$$

$$CVM' = 0 \Rightarrow 0{,}5q - 4 = 0 \Rightarrow q = \frac{4}{0{,}5}$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 8}$$

نحسب CVM عند $q = 8$ فنجد

$$CVM = 0{,}25(8)^2 - 4(8) + 20$$

$$\Rightarrow \boxed{CVM = 4} \Rightarrow \boxed{P_q = 4}$$

هو أدنى سعر تقبل به المؤسسة.

إذن دالة العرض بدلالة السعر هي:

$$q = \frac{8 + \sqrt{4 + 3P_q}}{1{,}5} \quad si \quad P_q \geq 4$$

$$q = 0 \quad si \quad P_q < 4$$

3- في الفترة الطويلة نفس طريقة الفترة القصيرة لكن نستخدم CTM بدل CVM أي نشتق CTM ونعدمها لإيجاد q ثم السعر الأدنى

6

- توازن السوق -

1- يجب الاطلاع على كل من:
- سوق المنافسة الكاملة (شروطه)
- سوق الاحتكار التام (شروطه)
- سوق المنافسة الاحتكارية (شروطه)
- سوق احتكار القلة (شروطه).

نقصد من دراسة نظرية توازن السوق إليه تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية في سوق سلعة معينة. حيث أن تساوي الكمية المعروضة من سلعة معينة (العرض) مع الكمية المطلوبة منها (الطلب) يحدد لنا ما يعرف بتوازن السوق.

1- توازن السوق في ظل المنافسة الكاملة: يتحقق توازن السوق في هذه الحالة لما تساوي الكمية المعروضة (O) والكمية المطلوبة (D) من سلعة معينة.

$$D = O$$

دالة العرض = دالة الطلب

من خلال هذا الشرط يمكننا تحديد كل من سعر التوازن و كمية التوازن.

ملاحظة: إذا كان سعر السوق أكبر من سعر التوازن (العرض أكبر من الطلب) وبالتالي المنافسة ستجعل المنتجين يخفضون الأسعار حتى يتمكنوا من بيع منتجاتهم وعليه ينخفض سعر السوق تدريجيا حتى يتساوى مع سعر التوازن (نرجع لوضع التوازن)

- أما إذا كان سعر السوق أقل من سعر التوازن (الطلب أكبر من العرض) هنا سيكون المنتجين معرضين للخسارة حيث أن سعر البيع لا يمكنهم من تغطية تكاليف الانتاج فيتوقفون عن إنتاج السلع، قلة السلعة في السوق يجعل المشترين يتهافتون لشرائها فيرتفع سعرها ليساوي سعر التوازن (نرجع لوضع التوازن)

(4)

وعليه فالسعر التوازني هو الوحيد الكفيل بإحداث توافق بين الطالبين والعارضين وهو سعر وحيد.

مثال: لنفترض أن دالتي الطلب والعرض على السلعة x، في سوق تسوده المنافسة الكاملة، هما على الشكل التالي:

$D = 35 - 3P_x \quad , \quad O = 2P_x$

المطلوب: هو تحديد سعر وكمية التوازن للسلعة x.

الحل: عند التوازن يكون العرض مساويا للطلب:

$D = O \Rightarrow 35 - 3P_x = 2P_x$

$\Rightarrow 2P_x + 3P_x = 35 \Rightarrow \boxed{P_x = 7}$

وهو سعر التوازن

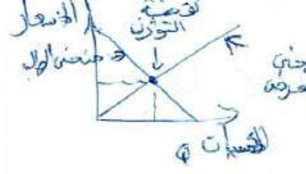
بالتعويض بقيمة $P_x = 7$ في دالة العرض أو دالة الطلب نحصل على الكمية التوازنية.

$D = 35 - 3(7) = 14$

$O = 2(7) = 14$

$\boxed{D = O}$

ملاحظة: التمثيل البياني أو الهندسي للنقطة التوازنية يكون بتمثيل منحنى العرض والطلب (بافتراض نقاط مساعدة لحل منحنى) ونقطة التقاطع بين المنحنيين هي نقطة التوازن



حل التمرين رقم (1): لدينا: دالة الطلب:

$D = -50P + 250$

دالة العرض: $O = \frac{100}{3}P$

تحديد مستوى التوازن: $D = O$

$\Rightarrow -50P + 250 = \frac{100}{3}P \Rightarrow \frac{100}{3}P + 50P = 250$

$\Rightarrow \frac{100+150}{3}P = 250 \Rightarrow \frac{250}{3}P = 250$

(8)

$$\Rightarrow P = \frac{250}{\frac{250}{3}} \Rightarrow P = \frac{\cancel{250} \times 3}{\cancel{250}}$$

$\boxed{P=3}$ وهو سعر التوازن.

أما الكمية التوازنية فنحصل عليها بالتعويض في أحد الدالتين دالة العرض أو دالة الطلب:

$$O = \frac{100}{3} \times 3 \Rightarrow \boxed{O = 100}$$

أو $D = -50(3) + 250 = -150 + 250 = \boxed{100}$

إذن الكمية التوازنية هي: $\boxed{Q = 100}$

التمثيل البياني:

1/ لتمثيل منحنى الطلب نفترض نقاط مساعدة:

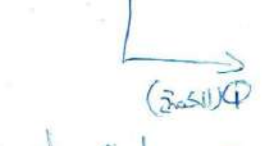
$$D = -50P + 250$$

P	0	1	2	3	4	5
D أو (Q)	250	200	150	100	50	0

2/ لتمثيل منحنى العرض نفترض قيم مساعدة:

$$O = \frac{100}{3} P$$

P	0	1	2	3	4	5
O أو (Q)	0	$\frac{100}{3}$	$\frac{200}{3}$	100	$\frac{400}{3}$	$\frac{500}{3}$



نمثل قيم الجدولين على معلم متعامد ومتجانس

نقطة تقاطع المنحنيين هي نقطة التوازن المحددة سابقا:

$(P = 3)$ $(Q = 100)$

$(100 ; 3)$

حل التمرين رقم 2:

$D = -3(P - 11)$ ، $O = \frac{2}{3}P$

حساب سعر وكمية التوازن:

9

عند التوازن: $D = O$

$$-3(P-11) = \frac{2}{3}P$$

$$\Rightarrow -3P + 33 = \frac{2}{3}P$$

$$\frac{2}{3}P + 3P = 33$$

$$\frac{2+9}{3}P = 33$$

$$\Rightarrow \frac{11}{3}P = 33 \Rightarrow P = \frac{33}{\frac{11}{3}} = \frac{33 \times 3}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 9}$$

وهو السعر التوازني.

أما كمية التوازن فنحصل عليها بالتعويض في إحدى الدالتين:

$$D = -3(9-11) \Rightarrow D = -3(-2)$$

$$\boxed{D = 6}$$

$$O = \frac{2}{3}(9)$$

$$\boxed{O = 6}$$

ومنه الكمية التوازنية هي $\boxed{Q = 6}$

ملاحظة التمثيل البياني بنفس الطريقة في التمرين السابق.

2 - يتحمل المشروع نفقة كلية معطاة بالجدول الآتي:

q	1	2	3	4	5	6	7	8
CT	7	11	13	16	20	27	36	50

شروط تعظيم الربح هي: ① $C_m = P_q$ ، ② المشتقة الثانية أقل من الصفر

وعليه علينا حساب C_m عند مختلف قيم q من (1 إلى 8) لنحدد الوضعية التي يكون عندها الربح أعظميا ثم نحسب قيمة الربح: $P = RT - CT$

C_m	-	4	2	3	4	7	$\boxed{9}$	14
السعر التوازني ← P_q	9	9	9	9	9	9	$\boxed{9}$	9
$P_q \cdot q$ ← RT	9	18	27	36	45	54	63	72
$RT-CT$ ← الربح ← الربح P	2	7	14	20	25	27	27	22

$$C_m = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

وبالتالي تساوي cm و P عندما $q=7$ وهو شرط تعظيم الربح وبالتالي $q=7$ هو مستوى الانتاج الذي يكون عنده الربح أعظميا.

الربح الأعظمي:

$$P = RT - CT$$

$$P = P.q - CT$$

$$P = 9 \times 7 - 36$$

$$\boxed{P = 27}$$

- ينسحب المنتج من المشروع عند أدنى حد للتكلفة الكلية المتوسطة CTM (في حالة الجدول كما في هذا التمرين) ورياضيا ~~...~~ عند النقطة التي يكون فيها $\frac{\delta CTM}{\delta q} = 0$ (نحسب CTM ونشتق ونعدم المشتقة)

إذن يجب حساب CTM من $q=1$ إلى $q=8$

q	1	2	3	4	5	6	7	8
CTM	7	5,5	4,3	4	$\boxed{4}$	4,5	5,1	6,25

$CTM = \frac{CT}{q}$ (لدينا قيم CT من المعطيات)

وبالتالي أدنى حد للتكلفة المتوسطة 4 وعند هذا الحد $4 = CTM = cm$ وهو الحد الذي ينسحب عنده المشروع أي لما

$$\boxed{q = 4}$$

حل التمرين رقم 3 : لدينا:

$$D = 12 - \frac{3}{5}P \quad , \quad O = \frac{3}{5}P$$

1- حساب سعر وكمية التوازن: عند التوازن $D = O$

$$\Rightarrow 12 - \frac{3}{5}P = \frac{3}{5}P \Rightarrow \frac{3}{5}P + \frac{3}{5}P = 12$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5}P = 12$$

11

$\Rightarrow P = \frac{12}{\frac{6}{5}} \Rightarrow P = \frac{12 \times 5}{6} \Rightarrow \boxed{P = 10}$

الكمية التوازنية نحصل عليها بالتعويض في إحدى الدالتين :

$D = 12 - \frac{3}{5}(10) = \boxed{6}$

$O = \frac{3}{5} \times 10 = \boxed{6}$

ومنه الكمية التوازنية هي $\boxed{Q = 6}$

$CT = \frac{1}{2}q^3 - 4q^2 + 16q$ -2

حساب كل من التكلفة الكلية المتوسطة والتكلفة الحدية .

(التكلفة الكلية المتوسطة) $\leftarrow CTM = \frac{CT}{q} = \frac{1}{2}q^2 - 4q + 16$

التكلفة الحدية $\leftarrow Cm = \frac{\delta CT}{\delta q} = \frac{3}{2}q^2 - 8q + 16$

3 - شروط تعظيم الربح هي : $Cm = P_q$ والمشتقة الثانية أقل من الصفر.

حساب قيمة الربح : نطبق الشرط $Cm = P_q$

فنجد :

$\frac{3}{2}q^2 - 8q + 16 = 10$ السعر التوازني

$\frac{3}{2}q^2 - 8q + 16 - 10 = 0$

$\frac{3}{2}q^2 - 8q + 6 = 0$

$\Delta = 28$

$q = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = q_1 = 4{,}43$ مقبول , $q_2 = 0{,}9$ مرفوض

إذن $q = 4{,}43$ هو مستوى الإنتاج الذي يسمح للمنتج بتحقيق أعظم ربح.

حساب قيمة الربح :
$P = RT - CT$

$RT = P_q \cdot q = 10 \times 4{,}43 = 44{,}3$

$CT = \frac{1}{2}(4{,}43)^3 - 4(4{,}43)^2 + 16(4{,}43)$

$\boxed{CT = 35{,}84}$

$P = 44{,}3 - 35{,}84 = \boxed{8{,}445}$

4 - متى ينسحب المشروع من السوق :

عندما : $\frac{\delta CTM}{\delta q} = 0$

$CTM = \frac{CT}{q} = \frac{1}{2}q^2 - 4q + 16$

$CTM' = q - 4 = 0$

$\boxed{q = 4}$

$CTM = \frac{1}{2}(4)^2 - 4(4) + 16 = \boxed{8}$

وهو أدنى سعر $\boxed{P = 8}$ وبالتالي المشروع ينسحب من السوق لما $P < 8$.

(تابع لدالة العرض) مرونة دالة العرض السعرية:

$$e_o = \frac{\delta q}{\delta p_q} \times \frac{p_q}{q} = \dots \%$$

ملاحظة إذا كانت معامل المرونة موجبا فالعلاقة طردية والعكس صحيحة.

($e_o = 1$) إذا كانت معامل المرونة = 1 العرض متكافئ المرونة (أحادي المرونة)
($e_o > 1$) ،، ،، ،، المرونة > 1 العرض مرن
($e_o < 1$) ،، ،، ،، المرونة < 1 العرض غير مرن.
($e_o = 0$) ،، ،، ،، المرونة = 0 العرض عديم المرونة.
($e_o = \infty$) ،، ،، ،، ،، = ∞ العرض لا نهائي المرونة