Cours1: Valeurs et vecteurs propres

القيم الذاتية و الأشعة الذاتية

I. Valeurs et vecteurs propres:

Le problème des valeurs et vecteurs propres se pose en ces termes: soit une matrice carrée *A d'ordre n, existe-t-il un vecteur x non nul et un scalaire λ* tels que:

$$Ax = \lambda x$$

En d'autres termes, on cherche s'il existe un vecteur *x qui en le multipliant* par *A nous donne un multiple de lui-même. Les valeurs de λ qui satisfont* cette relation s'appellent les valeurs propres de la matrice *A et les vecteurs x s'appellent vecteurs propres de la matrice A.*

Nous pouvons récrire cette relation de la manière suivante:

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

- ❑ Pour qu'il y ait des solutions non triviales , il est nécessaire et suffisant que le déterminant de *(A—λI) soit* égal a zéro.
- ❑ Pour résoudre notre problème, nous devons donc trouver des valeurs pour A qui annulent |A—λ I|. Puis nous calculons pour chaque valeur de λ le vecteur *x qui lui est associe.*
- ❑Le déterminant |A— λ I| pour toute matrice *A d'ordre n est une fonction* de A et plus exactement un polynôme de degré *n en A. Nous savons que tout* polynôme de degré n possède au plus *n racines. Par conséquent, nous aurons* au plus *n solutions (pas nécessairement toutes distinctes).*
- ❑Si la matrice *A possède n valeurs propres distinctes, alors les n vecteurs* propres associes sont linéairement indépendants et forment une base de l'espace (de dimension n).

Exemple 1: Soit la matrice A d'ordre 3 suivante:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous allons voir s'il existe des valeurs de A et des vecteurs x tels que $Ax = \lambda x$. Nous formons tout d'abord la matrice $(A— \lambda I)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Nous calculons le déterminant de $(A — \lambda I)$ en développant les cofacteurs de la deuxième ligne:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| &= (1-\lambda)[(4-\lambda)(-\lambda)-(2)(-2)] \\ &= (1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4). \end{aligned}$$

- Si nous développons cette expression, nous trouvons un polynôme en A du troisième degré:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}| &= -4\lambda+\lambda^2+4+4\lambda^2-\lambda^3-4\lambda \\ &= -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4. \end{aligned}$$

- Cependant pour trouver les solutions de $|A— \lambda I| = 0$, il est préférable de prendre l'expression

$$(1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4) = 0$$

Nous avons une première solution qui est:

$$\begin{aligned} (1-\lambda) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1. \end{aligned}$$

Les deux autres solutions se trouvent en posant:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

que nous pouvons factoriser en:

$$(\lambda-2)(\lambda-2)=0.$$

Nous avons donc $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 2$. On voit que la racine $\lambda = 2$ intervient deux fois. Il reste a trouver les vecteurs associes à $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

➢ En remplaçant λ par 1 dans $(A - \lambda I)x = 0$, nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 3 & 2 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 4 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 1 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne:

$$x_1 + \frac{7}{12}x_3 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{12}x_3 = 0.$$

et avec $x_3 = s$ et $s \neq 0$; nous avons la solution suivante:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{12}s \\ x_2 &= -\frac{1}{12}s \\ x_3 &= s. \end{aligned}$$

Le vecteur

$$x' = [-\frac{7}{12}s \quad -\frac{1}{12}s \quad s]$$

est donc un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ .On vérifie aisément que $Ax = x$.

➢ En remplaçant λ par 2 dans $(A - \lambda I)x = 0$, nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 3 & 2 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

et avec $x_1 = t$ et $t \neq 0$; nous avons la solution suivante:

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -t. \end{aligned}$$

Le vecteur

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} t & 0 & -t \end{bmatrix}$$

est donc un vecteur propre associé à $\lambda = 2$ .On vérifie aisément que $Ax = 2\,x$.

II. Diagonalisation de matrices carrées قطرية المصفوفات المربعة

Une application courante des valeurs et des vecteurs propres est la diagonalisation des matrices carrées. Une matrice carrée (n x n) A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée (n x n) D diagonale et une matrice carrée (n x n) S inversible, telles que

$$A = SDS^{-1}$$

Exemple 2:

Posons:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{SDS}^{-1}$$

1. Méthode de diagonalisation:

1. Calculer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$
2. Chercher les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
3. Si la matrice possède n vecteurs propres linéairement indépendants , alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable et l'on peut passer à l'étape 4. Sinon, $\boldsymbol{A}$ n'est pas diagonalisable et l'on s'arrête là.
4. La matrice $\boldsymbol{S}$ se construit alors à partir des n vecteurs propres $\boldsymbol{x}_i$ mis en colonne:

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\dots|\boldsymbol{x}_n|)$$

Notons $\boldsymbol{\lambda}_i$ la valeur propre associée au i^e vecteur propre $\boldsymbol{v}_i$. les valeurs propres sont le coefficients de la matrice diagonale $\boldsymbol{D}$**:**

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{SAS^{-1}}$

Exemple 3: Soit la matrice A:

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ses valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1\ et\ \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

2. les vecteurs propres correspondants sont

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ et\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. les vecteurs propres sont linéairement indépendants . On peut donc diagonaliser la matrice A
4. On forme la matrice S en alignant les vecteurs propres en colonne:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et en plaçant les valeurs propres correspondantes sur la diagonale de la matrice D:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule finalement la matrice inverse S^{-1}

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que la relation $A = SDS^{-1}$ est bien établie:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{SDS}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

2. Propriétés :

1. Le déterminant est invariant par diagonalisation, est égal au produit des valeurs propres

$$Det\,(\boldsymbol{A}) = Det\,(\boldsymbol{D}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

En effet

$$\begin{aligned} Det\,(\boldsymbol{A}) &= Det\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) \\ &= Det\,(\boldsymbol{S})\, Det\,(\boldsymbol{D})\, Det\left(\boldsymbol{S}^{-1}\right) \\ &= Det\,(\boldsymbol{S})\, Det\,(\boldsymbol{D})\, \frac{1}{Det\,(\boldsymbol{S})} \\ &= Det\,(\boldsymbol{D}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n. \end{aligned}$$

2. la trace est aussi invariante par diagonalisation, est égale à la sommes des valeurs propres

$$tr\,(\boldsymbol{A}) = tr\,(\boldsymbol{D}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

En effet

$$\begin{aligned} tr\,(\boldsymbol{A}) &= tr\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) &&= tr\left((\boldsymbol{SD})\,\boldsymbol{S}^{-1}\right) \\ &= tr\left(\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{SD})\right) &&= tr\left(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{SD}\right) \\ &= tr\,(\boldsymbol{D}) &&= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \end{aligned}$$

3. le calcul des puissances est simplifié grâce à la diagonalisation

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m &= \boldsymbol{SD}^m\boldsymbol{S}^{-1} \\ \text{où } \boldsymbol{D}^m &= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m &= \left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)^m \\ &= \left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)\ldots\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) \\ &= \boldsymbol{SDS}^{-1}\boldsymbol{SDS}^{-1}\ldots\boldsymbol{SDS}^{-1} \\ &= \boldsymbol{SD}^m\boldsymbol{S}^{-1}. \end{aligned}$$

TD (Valeurs et vecteurs propres)

Exercice 1:

Soit la matrice A suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 4 & x \end{bmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de x la matrice A est-elle inversible?
2. Pour $x = 0$, calculer les valeurs propres de A.

Exercice 2:

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A

2. Trouver la matrice P et D où P est non-singulière avec $D = P^{-1}AP$ est diagonale

Exercice 3:

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Calculer toutes les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de A
2) Trouver une matrice non-singulière P tel que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3) Calculer P^{-1}
4) trouver A^6 et $f(A)$, où $f(t) = t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 7t + 3$.
5) trouver la racine cubique de B tel que $B^3 = A$ et B a des valeurs propres réelles.

Exercice 4

soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Calculer toutes les valeurs propres de A

Trouver tous les vecteurs propres de A

A est-elle diagonalisable? si oui déterminer la matrice P tel que $D = P^{-1}AP$ est diagonale

Cours2: Vecteurs et espaces vectoriels
الأشعة و الفضاء الشعاعي

I. Les vecteurs الأشعة

Par vecteur, nous entendons toujours vecteur-colonne. Chaque colonne d'une matrice peut être considérée comme un vecteur. Les vecteurs-lignes sont les transposées des vecteurs-colonne . Chaque ligne d'une matrice peut être considérée comme les transposées d' un vecteur. les éléments d'un vecteur sont appelés composantes du vecteur (toujours des nombres réels). Un vecteur peut donc avoir 1 ou 2 ou m composantes (عنصرأو مكون).

- **vecteur unité** الشعاع الأولي

Un vecteur dont la *ième composante est 1 et dont tous les autres éléments* sont zéro est appelé vecteur unité et est note u_i.

Exemple 1: *Pour des vecteurs à 4 composantes, il y a 4 vecteurs unités :*

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

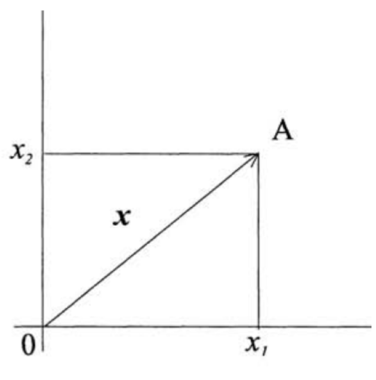
- **Vecteur nul**

Un vecteur dont toutes les composantes sont nulles est appelé vecteur nul et est note 0.

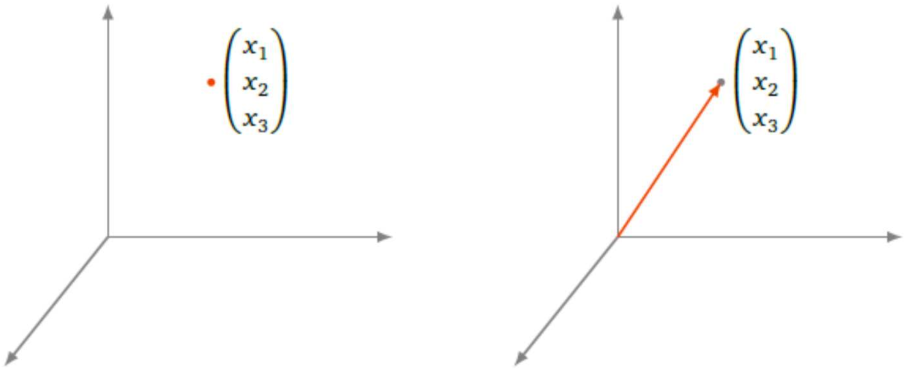
II. Interprétation géométrique des vecteurs

Nous savons qu'un point dans l'espace a deux dimensions est représenté par une paire de nombres. Nous pouvons alors dire qu'un vecteur a deux composantes définit un point dans l'espace a deux dimensions. Cette constatation nous permet de représenter un vecteur graphiquement.

- Sur la figure, le point A est défini par le vecteur $x' =[x_1\ x_2]$. *Le segment orienté OA* (joignant l'origine au point A) représente le vecteur *x.*



a) L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté R^3. Le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :

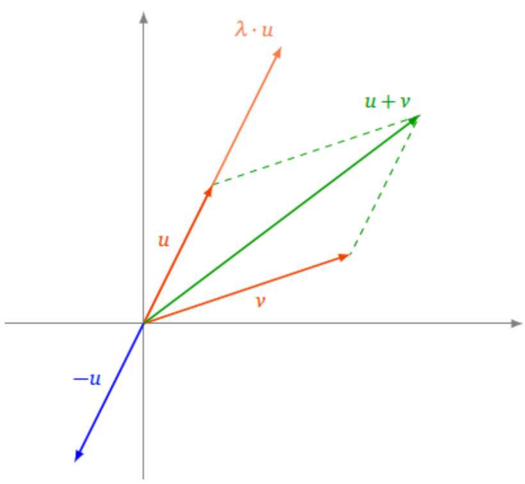


III. Opérations sur les vecteurs

Soient $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de R^n

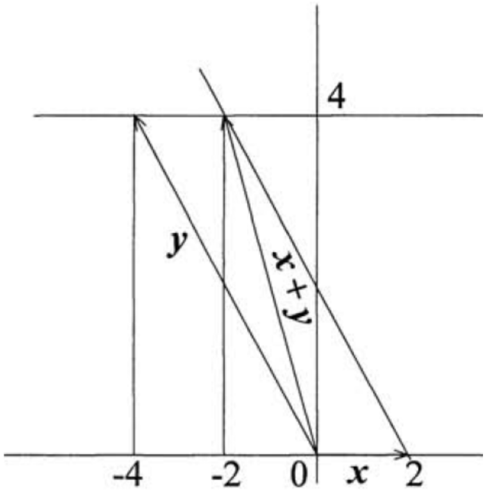
- ***Somme de deux vecteurs.*** Leur somme est par définition le vecteur $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$
- ***Produit d'un vecteur par un scalaire.*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un ***scalaire***) : $\lambda\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$
- **L'*opposé*** du vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

__Exemple 2:__ Voici des vecteurs dans R^2 (ici *λ= 2)*



Exemple 3: Soient les deux vecteurs x' = [2 0] et y' = [-4 4]. Représentons dans une figure les vecteurs x, y et x + y.

$$x' + y' = [2 \;\; 0] + [-4 \;\; 4] = [-2 \;\; 4].$$



propriétés:

Soient $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et , $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ des vecteurs de R^n. *et* λ *et* $\mu \in R$ R. *Alors :*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Ces huit propriétés font de R^n *un espace vectoriel. Dans le cadre général, ce sont ces huit* propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel.

IV. Longueur d'un vecteur طاولة شعاع

Du point de vue géométrique, la longueur ou norme d'un vecteur est la longueur du segment qui le représente. Elle est définie par la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes. Pour un vecteur x à n composantes, sa longueur , notée par $\|x\|$ est définie par l'expression:

$$\| \boldsymbol{x} \| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2} .$$

Exemple 4: *Calculons la longueur du vecteur à 3 composantes suivant:*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\| \boldsymbol{x} \| = ((-4)^2 + (0)^2 + (3)^2)^{1/2} = (16 + 0 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5.$$

V. Produit scalaire de deux vecteurs (الجداء السلمي)

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de même forme, leur produit scalaire est défini par la somme des produits des éléments correspondants. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des vecteurs à n composantes, le produit intérieur s'exprime par:

$$\boldsymbol{x}' \cdot y = \boldsymbol{y}' \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i .$$

Exemple 5 : *Soient les vecteurs à 2 composantes x' = [3 1] et y' = [- 4 5], alors :*

$$\boldsymbol{x}' \cdot y = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i = 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 = -7 \ \ ou$$

$$\boldsymbol{y}' \cdot x = \sum_{i=1}^{2} y_i x_i = (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -7.$$

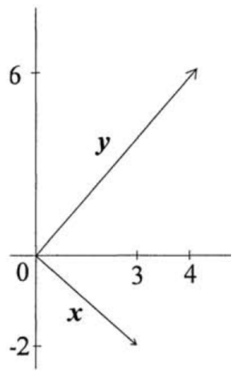
VI. Vecteurs orthogonaux الأشعة المتعامدة

Si le produit scalaire de deux vecteurs est nul, on dit que les deux vecteurs sont orthogonaux. Du point de vue géométrique, deux vecteurs orthogonaux sont perpendiculaires متعامد. Si plus de deux vecteurs orthogonaux ont une longueur égale à 1 (شعاع واحدي), on dit qu'ils sont orthonormaux (متعامد و متجانس).

Exemple 6: *Soient les deux vecteurs à deux composantes suivants, calculons le produit scalaire et représentons-les sur une figure*

$$\boldsymbol{x}' = [3 \quad -2], \quad \boldsymbol{y}' = [4 \quad 6].$$

Le produit scalaire est égal à: $x' \bullet y = 12 - 12 = 0$. *Les deux vecteurs sont donc orthogonaux.*



Si x et y sont deux vecteurs à n composantes , alors on a les deux inégalités suivantes:

Inégalité de Cauchy-Schwarz: $|x' \bullet y| \leq \|x\| \ \|y\|$

Inégalité de Minkowsky: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

VII. Dépendance linéaire الارتباط الخطي

Soient les m vecteurs à n composantes $x_1, x_2, \cdots, x_m$. On dit qu'ils sont linéairement indépendants (مرتبطين خطيا) si et seulement s'il existe des constantes $c_1, c_2, \cdots, c_m$ dont au moins est différente de zéro , telles que:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = \mathbf{0}$$

Dans le cas contraire, les vecteurs sont linéairement indépendants (مستقلين خطيا) , c'est à dire

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

Exemple 7 : Soit

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

L'équation $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \mathbf{0}$ nous donne

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En développant, nous avons:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -c_1 & + & 0c_2 & - & c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & + & 2c_2 & + & 0c_3 & = & 0 \\ -3c_1 & - & c_2 & - & 4c_3 & = & 0 \end{array}$$

nous avons:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

nous cherchons le rang de A par les transformations élémentaires:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang de A est égal à 2. Il existe donc des solutions non triviales puisque $r = 2 < n = 3$. les vecteurs sont linéairement dépendants.

VIII. Combinaison linéaire (التركيبة الخطية)

On dit que le vecteur $\boldsymbol{y}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ s'il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ telles que:

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{x}_3$$

<u>Exemple 8:</u> *Reprenons les 3 vecteurs de l'exemple 7 et regardons si* x_3 *est une combinaison linéaire de* x_1*et* x_2 *Nous avons:*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -1 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 &= -4. \end{aligned}$$

Nous pouvons résoudre ce système: de la 1ère équation, nous tirons $\lambda_1 = 1$ que nous remplaçons dans la 2ème ou la 3ème équation:

$$\begin{aligned} -2 \cdot 1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 2 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_3$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ car $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$

IX. Espaces vectoriels الفضاء الشعاعي

Un espace vectoriel à n dimensions peut être défini comme étant l'ensemble de tous les vecteurs à n composantes. Soient $\boldsymbol{x}_a$ et $\boldsymbol{x}_b$ deux vecteurs appartenant à cet ensemble. On vérifie facilement que:

- le vecteur ($\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b$) est un vecteur du même ensemble.
- le vecteur $\boldsymbol{\lambda x}_a$, où λ est un scalaire, c'est à nouveau un vecteur du même ensemble.

On dit alors qu'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs fermé par rapport à l'addition et à la multiplication scalaire

Exemple 9: *Considérons l'ensemble de tous les vecteurs a 2 composantes.*

soient

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad et \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nous vérifions que $\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b$ appartient à l'ensemble et que $\boldsymbol{\lambda x}_a$, avec $\lambda = 2$ appartient aussi à l'ensemble:

$$\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ est bien un vecteur à 2 composantes.

$$\lambda \boldsymbol{x}_a = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ est bien un vecteur à 2 composantes.

Remarque: Nous remarquons qu'il y a une infinité de vecteurs dans un espace vectoriel. Toutefois, grâce a l'addition et a la multiplication scalaires, on peut engendrer tout l'espace vectoriel a l'aide d'un ou plusieurs vecteurs. Ceci nous amène a la définition de la dimension d'un espace vectoriel (بعد الفضاء الشعاعي).

Par dimension d'un espace vectoriel, on entend le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans l'espace considéré, ou, ce qui revient au même, le nombre minimal de vecteurs indépendants nécessaires à engendrer tout l'espace considéré.

Nous désignerons, par conséquent, un espace vectoriel par:

$$\boldsymbol{V}_i^j$$

où l'indice *i représente le nombre de composantes des vecteurs et l'indice j la dimension de l'espace.*

Exemple 10 : *Considérons l'ensemble de tous les vecteurs X_i à 3 dimensions qui sont de la forme*

$$x^{'} = [s \quad 3s \quad 9s]$$

où s est un nombre réel quelconque. Il y a une infinité de vecteurs de ce type, mais, grâce à la multiplication scalaire, on peut engendrer tout l'espace vectoriel en partant par exemple du vecteur $x^{'} = [1 \quad 3 \quad 9]$. En d'autres termes, un seul vecteur suffit à engendrer tous les autres vecteurs. La dimension de cet espace vectoriel est donc égal à 1 et on écrit $\boldsymbol{V_3^1}$.

Exemple 11 : Dans l'exemple 9, nous pouvons engendrer tous les vecteurs y à 2 composantes à l'aide d'une combinaison linéaire des deux vecteurs unité $\boldsymbol{x}_a$ et $\boldsymbol{x}_b$. *En effet,*

$$\boldsymbol{y} = y_1\, \boldsymbol{x}_a + y_2 \boldsymbol{x}_b$$

$\boldsymbol{x}_a$ et $\boldsymbol{x}_b$ sont indépendants. Par conséquent, la dimension de l'espace vectoriel est égal à 2. Dans ce cas, au lieu d'écrire $\boldsymbol{V_2^2}$, étant donné que les deux indices se confondent, on écrit simplement $\boldsymbol{V_2}$ et on parle alors d'un espace vectoriel à 2 dimensions complet. Nous pouvons généraliser cette notion et noter par $\boldsymbol{V_n}$ un espace vectoriel à n dimensions complet.

X. Bases (أساس)

Une base de l'espace vectoriel $\boldsymbol{V_n^r}$ est un ensemble de r vecteurs linéairement indépendants appartenant à cet espace vectoriel et engendre $\boldsymbol{V_n^r}$.

- Dans l'exemple 10, le vecteur *x' = [1 3 9] est une base pour V^1_3.*
- *Dans* L'exemple 9, les deux vecteurs unité *u_1= [1 0] et u_2 = [0 1] forment une* base pour V_2.
- Les deux vecteurs [1 2] et [2 5] sont aussi une base pour *V_2.*
- *En* revanche, les deux vecteurs [2 -2] et [4 -4] ne forment pas une base pour V_2 car ils sont linéairement dépendants.

Il y a donc plusieurs bases possibles pour un espace vectoriel. Chaque base d'un espace vectoriel contient le même nombre de vecteurs linéairement indépendants.

Tout vecteur dans l'espace $\boldsymbol{V_n^r}$ peut être représenté par une combinaison linéaire unique des r vecteurs de base. Nous pouvons distinguer plusieurs types de bases:

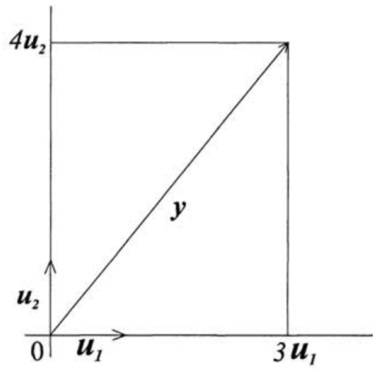
- ***base canonique:*** *formée de vecteurs unité u_i*
- ***base orthonormale:*** formée de vecteur orthogonaux et de longueur égale à 1.
- **base orthogonale:** formée de vecteurs orthogonaux.
- **base quelconque :**formée de vecteurs linéairement indépendants.

Exemple 12: Considérons l'espace vectoriel V_2. Pour former une base, il faut deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons plusieurs bases différentes :

- base canonique représentée par les vecteurs $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- base orthogonale représentée par les vecteurs $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- base quelconque représentée par les vecteurs $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Nous allons représenter graphiquement le vecteur $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en fonction des trois bases ci-dessus.

a) **La base canonique:** Représentation graphique de la base canonique et du vecteur $y = 3u_1 + 4u_2$ en fonction de cette base



b) **La base orthogonale :**

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En développant, cela donne 2 équations à 2 inconnues α et β:

$$\alpha + 2\beta = 3$$

$$-2\alpha + \beta = 4$$

Nous résolvons ce système en soustrayant deux fois la deuxième équation de la première, ce qui donne:

$$5\,\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -1$$

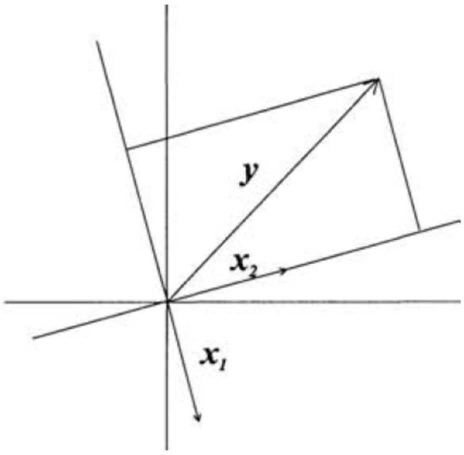
et nous remplaçons $\alpha = -1$ dans la première équation pour obtenir

$$-1 + 2\beta = 3 \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$$

Nous avons donc trouvé les nouvelles coordonnées de y qui peut s'écrire:

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2}$$

Représentation graphique de la base orthogonale et du vecteur *y en fonction de cette base*



c) **La base quelconque**

$$\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}_3 + \mu \boldsymbol{x}_4$$

A nouveau, nous devons trouver les nouvelles coordonnées $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$ pour pouvoir représenter le vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction de la base $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$. Nous procédons de la même manière et obtenons:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le système est le suivant:

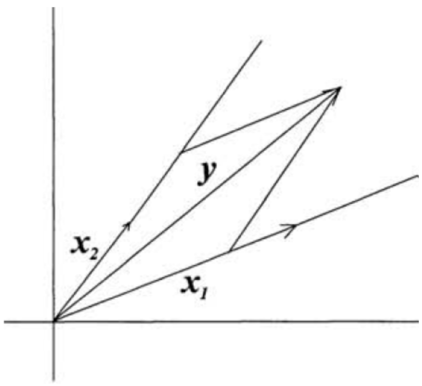
$$\lambda + 3\beta = 3$$

$$2\lambda + 2\beta = 4$$

et les solutions sont $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$

Le vecteur y qui peut donc s'écrire: $\boldsymbol{y} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x_3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x_4}$

Représentation graphique de la base quelconque et du vecteur *y en fonction de cette base*



TD (Vecteurs et espaces vectoriels)

Exercice 1:

1. développer

(a) $\langle 5u_1 + 8u_2, 6v_1 - 7v_2 \rangle$, (b) $\langle 3u + 5v, 4u - 6v \rangle$, (c) $\|2u - 3v\|^2$

2. considérons les vecteurs $u' = [1 \quad 2 \quad 4]; v' = [2 \quad -3 \quad 5]; w' = [4 \quad 2 \quad -3]$ trouver

(a) $u'.v$ (b) $u'.w$ (c) $v'.w$ (d) $(u+v)'.w$ (e) $\|u\|$ (f) $\|v\|$

3. trouver k pour que ces deux vecteurs soient orthogonaux

$u' = [1 \quad 2 \quad k \quad 3]$ et $v' = [3 \quad k \quad 7 \quad -5]$

Exercice 2:

1. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants:

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $u' = [1 \quad 1 \quad 0]; v' = [1 \quad 3 \quad 2]; w' = [4 \quad 9 \quad 5]$

2. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants:

$u' = [1 \quad 2 \quad 3]; v' = [2 \quad 5 \quad 7]; w' = [1 \quad 3 \quad 5]$

3. Déterminer si les matrices suivantes sont linéairement indépendantes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

Exercice 3:

1. Ecrire le vecteur $v' = [2 \quad -5 \quad 3]$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$u_1 = [1 \quad -3 \quad 2]; u_2 = [2 \quad -4 \quad -1]; u_3 = [1 \quad -5 \quad 7]$$

2. Ecrire le vecteur $v' = [1 \quad -2 \quad 5]$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$u_1 = [1 \quad 1 \quad 1]; u_2 = [1 \quad 2 \quad 3]; u_3 = [2 \quad -1 \quad 1]$$

3. Ecrire la matrice M comme combinaison linéaire des matrice A, B et C.

$M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$

Exercice 4:

1. Trouver a, b et c tels que les trois vecteurs suivants forment une base orthogonale de l'espace a trois dimensions:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -14 \\ b \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$$

2. soient l'ensemble des vecteurs suivants

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Montrer que l'ensemble des vecteurs cités en haut forment une base orthogonale de l'espace R^4 noté S

(b) Trouver les cordonnées d'un vecteur arbitraire $v' = [a \quad b \quad c \quad d]$ de R^4 en fonction de la base S